Siebenter Artikel.

Aufgaben dritten Grades: Verdoppelung des Würfels, Dreiteilung des Winkels

von Alberto Conti in Bologna.

Einleitung. Die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels ist aus dem fernsten Altertum zu uns herübergekommen. Zeugnis dafür ist eine authentische Urkunde, ein Brief, den der im dritten Jahrhundert v. Chr. zu Cyrene geborene griechische Geometer Eratosthenes an den König Ptolemäus II. gerichtet hat. Dort heißt es[1]):

„Eratosthenes grüßt den König Ptolemäus.

„Es wird erzählt, daß einer der alten Tragiker[2]) den Minos[3]) auf die Szene gebracht habe, im Begriff ein Grab für den Glaukos[4]) herstellen zu lassen, und daß Minos, als er bemerkte, daß dieses Grab auf allen Seiten 100 Fuß lang war, gesagt habe: »einen kleinen Raum fürwahr hast Du dem Grabe eines Königs zugemessen; es soll doppelt so groß sein; behalte die kubische Form bei und verdoppele schnell alle Seiten des Grabes«. Nun ist es klar, daß er sich geirrt hat. Denn durch Verdoppelung der Seiten wird eine ebene Figur[5]) viermal so groß, eine körperliche[6]) aber achtmal so groß. Aber auch unter den Geometern entstand die Frage, wie

1) Vgl. Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, ed. Heiberg, Leipzig 1881, 3, pg. 102—106.

2) Nach einigen ist es Euripides (vgl. N. Th. Reiner, Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas. Gottingae 1798, pg. 20); andere stimmen nicht bei (vgl. Heiberg, pg. 105 des in Fußnote 1) angeführten Werkes).

3) Alter König von Kreta.

4) Sein Sohn.

5) Das Quadrat.

6) Der Würfel.

man irgend eine gegebene körperliche Figur unter Beibehaltung ihrer Gestalt verdoppeln könne. Und diese Aufgabe wurde Verdoppelung des Würfels genannt, weil man einen gegebenen Würfel zu verdoppeln suchte.

„Alle waren lange in Verlegenheit, da fand zuerst Hippokrates von Chios, daß, wenn man zwischen zwei gerade Linien, von denen die größere doppelt so groß als die kleinere ist, zwei mittlere Proportionalen in stetiger Proportion einschalten könnte, der Würfel verdoppelt sein würde; auf diese Weise wurde diese Verlegenheit in eine nicht geringere verwandelt.

„Man erzählt ferner, daß später die Delier, durch das Orakel angetrieben, einen gewissen Altar zu verdoppeln, in dieselbe Verlegenheit kamen.[1] Und es wurden Gesandte zu den Geometern, die bei Platon in der Akademie lebten, mit der Bitte geschickt, das Verlangte zu suchen. Diese gingen eifrig an die Sache und suchten zwischen zwei gegebene Gerade zwei mittlere Proportionalen einzuschalten, und es soll Archytas von Tarent dies mit Hilfe von halben Zylindern getan haben, Eudoxus aber mit Hilfe der genannten krummen Linien. Nun gelang es allen, den Beweis zu vervollkommnen, aber die tatsächliche Ausführung und Anwendung für die Praxis gelang ihnen nicht, außer etwa dem Menächmus und dem mit Mühe . . .“

Dies ist der Anfang des Briefes, in dem Eratosthenes den sagenhaften Ursprung der Aufgabe und die ersten Versuche zu ihrer Lösung kurz zusammenfaßte, und gleichzeitig mit diesem Briefe sandte er dem Könige Ptolemäus eine seiner eigenen Lösungen der Aufgabe, über die wir später berichten werden (§ 6).

Inzwischen wollen wir bei dem Gedanken verweilen, der von den Historikern in einträchtiger Meinung dem Hippokrates von Chios (der in der zweiten Hälfte des fünften Jahrhunderts v. Chr. lebte) zugeschrieben wird, bei dem Gedanken nämlich, die in Rede stehende Aufgabe auf die andere der sogenannten „Einschaltung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebene Strecken“ zurückzuführen. Diese Aufgabe können wir in moderner Ausdrucksweise so aussprechen:

Es sind zwei Strecken a, b gegeben; man soll zwei andere x, y konstruieren, die mit a, b als Endgliedern die geometrische Reihe

[1] Daher der Name Delische Aufgabe, mit dem manchmal die hier in Rede stehende Frage bezeichnet wird.

$$a, x, y, b$$

bilden, so daß also ist:

(1)
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

In der Tat folgt aus dieser Kette gleicher Verhältnisse:

$$x^2 = ay$$

$$x = \frac{ab}{y}$$

und hieraus:

(2)
$$x^3 = a^2 b,$$

und daraus geht hervor, daß die Strecke x die Seite eines Würfels ist, der denselben Inhalt hat, wie ein gegebenes rechtwinkliges Parallelepiped, das das Quadrat der Seite a zur Basis und b zur Höhe hat.[1] Nimmt man im besondern $b = ma$, so folgt aus (2)

$$x^3 = ma^3,$$

d. h. die Gleichung für die Multiplikation eines Würfels mit irgend einer ganzen Zahl m, und nimmt man noch weiter $b = 2a$, so kommt man gerade auf die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels von der Seite a.

Mit der dem Hippokrates zugeschriebenen Entdeckung hatte die Schwierigkeit nur die Form gewechselt, und man hatte mit ihr keinen anderen Vorteil erlangt als den, die ursprüngliche Frage als eine planimetrische Aufgabe darzustellen, und vergebens machte man Versuche, diese Aufgabe allein mit dem Lineal und dem Zirkel zu lösen. Es war unmöglich, die Aufgabe unter diesen Umständen zu lösen, aber die Einsicht in diese Unmöglichkeit hängt von Betrachtungen ab, die den Forschungen der Griechen ganz fern lagen. Immerhin ist anzunehmen, daß die Griechen selbst die Vermutung hegten, daß die Lösung dieser Aufgabe allein mit den Mitteln der elementaren Geometrie nicht möglich ist, da die Resultate der Archytas, Platon, Menächmus, Eratosthenes, Appollonius, Nikomedes, Diokles, wie wir sehen werden, zeigen, daß diese Geometer die Bedingungen, die sie sich zuerst gestellt hatten, vorläufig wenigstens aufgeben und

1) Also ist es klar, daß auf die Einschaltung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebene Strecken a, b auch die allgemeine Aufgabe der Konstruktion eines Würfels, der mit einem gegebenen rechtwinkligen Parallelepiped von quadratischer Grundfläche gleichen Inhalt hat, zurückgeführt ist.

Lösungen suchen mußten, die sich auf wesentlich andere Methoden stützten, als sonst von ihnen zur Lösung geometrischer Aufgaben angewandt wurden.

Über das hohe Alter der Aufgabe der Dreiteilung des Winkels gibt es kein positives Zeugnis, aber die Ordnung in den Fortschritten des Menschengeistes läßt daran nicht zweifeln.[1]) Nachdem man den Winkel in zwei gleiche Teile geteilt hatte, wird die erste Frage, die sich darbot, die Teilung des Winkels in drei gleiche Teile gewesen sein, wenn es nicht sogleich die allgemeinere gewesen ist: die der Teilung des Winkels in zwei Teile, die zueinander in einem gegebenen Verhältnisse stehen, wie man aus der Erfindung der Quadratrix des Hippias vielleicht schließen könnte (§ 11). Von Hippias bis Archimedes haben wir keinen Mathematiker für diese Aufgabe der Dreiteilung zu erwähnen, und von Archimedes kommen wir zu Pappus, der im vierten Buche seiner Sammlung zwei Konstruktionen erwähnt, die zu den ältesten zu zählen sind, aber von denen man nicht weiß, wem sie ursprünglich zuzuschreiben sind.

Auch inbezug auf diese Aufgabe wurden zahllose fruchtlose Versuche gemacht, und wir können mit Bossut[2]) sagen, daß „dieser außerordentliche Eifer eine Art epidemischer Krankheit wurde, die sich von Jahrhundert zu Jahrhundert bis auf unsere Tage fortgesetzt hat. Sie mußte aufhören und hörte in der Tat für diejenigen, die den Fortschritt der Mathematik verfolgten, auf, als man in moderner Zeit begann, die Algebra auf die Geometrie anzuwenden. Heute ist das Übel für diejenigen, die diese Fragen mit den Waffen der Alten angreifen, unheilbar, weil es für sie, die mit der gegenwärtigen Wissenschaft nicht vertraut sind, Heilmittel nicht gibt.“

Immerhin sind die mannigfaltigen Untersuchungen, die durch diese Aufgabe und durch die andere der Verdoppelung des Würfels veranlaßt wurden, sehr nützlich gewesen, teils wegen der Erfindung verschiedener sinnreicher Apparate, um die genannten Aufgaben in annähernder und für die Praxis mehr als genügender Weise zu lösen, teils und vor allem wegen der neuen geometrischen Theorien, für die sie ein fruchtbarer Same wurden.

---

1) Vgl. J. F. Montucla, Histoire des Mathématiques, Paris 1792—1807, Teil 1, Buch 3.

2) Vgl. Ch. Bossut, Histoire générale des Mathématiques, Paris 1810.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nun von diesen beiden klassischen Aufgaben sprechen, indem wir zunächst die Unmöglichkeit dartun, sie elementar d. h. allein mit dem Lineal und dem Zirkel zu lösen (vgl. Art. IV, § 10), und dann die bemerkenswertesten Methoden erwähnen, die von den Alten und den Modernen angewandt worden sind, um diese Aufgaben entweder mit Hilfe der Kegelschnitte oder mit Hilfe von Linien höherer als zweiter Ordnung oder mittels eigens dazu konstruierter Apparate oder nach elementaren Näherungsmethoden zu lösen.

Wir schließen mit einem Hinweise auf die Methoden für die Lösung der allgemeinsten Aufgaben dritten Grades, indem wir im besonderen zeigen, wie sie sich alle entweder auf die Dreiteilung des Winkels oder auf die Einschaltung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebene Strecken zurückführen lassen.

Über den hier behandelten Gegenstand gibt es eine ausgedehnte Literatur aus allen Ländern und Zeiten — so groß ist die von diesen Aufgaben ausgeübte Anziehungskraft gewesen. Um von dieser Literatur eine Vorstellung zu erhalten, braucht man nur die Bibliographie von Wölffing[1]) aufzuschlagen, der mit großem Fleiße Hunderte von Arbeiten über die Teilung des Winkels in drei oder mehr gleiche Teile aufgefunden und chronologisch geordnet hat. Um so schwieriger ist unsere Aufgabe, uns in den angemessenen Grenzen für das Werk, von dem dieser Artikel einen Teil bildet, zu halten, dabei doch die bemerkenswertesten Untersuchungen der Alten und der Modernen anzuführen, die Ähnlichkeit verschiedener Lösungen, um unnütze Wiederholungen zu vermeiden, zu erkennen und alle ganz fruchtlosen Versuche ohne weiteres auszuschalten. Möchte diese Erwägung uns eine recht große Nachsicht auf seiten der Leser eintragen!

§ 1. Unmöglichkeit, die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels auf elementare Weise zu lösen. Wenn l die Seite eines gegebenen Würfels ist und daher l^3 sein Volumen darstellt, so ist die Seite eines anderen Würfels, dessen Volumen doppelt so groß als das des ersten ist, offenbar eine Wurzel der binomischen kubischen Gleichung

$$x^3 - 2l^3 = 0. \qquad (1)$$

Wenn wir dann voraussetzen, wie wir es offenbar, ohne die Allgemeinheit unserer Betrachtungen zu beeinträchtigen, tun können,

1) Vgl. Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen im Auftrage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg 1900 (Januar-Oktober), 1902 (Juli).

daß die Seite des gegebenen Würfels gleich 1 ist, so geht die Gleichung (1) über in

$$x^3 - 2 = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung ist irreduzibel.

Dieses Resultat ist in einem allgemeineren enthalten.

Es sei a eine rationale Zahl und $\frac{m}{n}$ der sie darstellende nicht kürzbare Bruch: dann ist die Gleichung $x^3 - \frac{m}{n} = 0$, von der die Multiplikation des Würfels mit $\frac{m}{n}$ abhängt, irreduzibel, wenn m und n nicht gleichzeitig Kuben von ganzen Zahlen sind.

In der Tat, wenn die genannte Gleichung reduzibel ist, so muß identisch sein:

$$x^3 - a = (x - b)(x^2 + cx + d),$$

wo b, c, d rationale Zahlen sind. Also hat die Gleichung $x^3 - a = 0$ die rationale Wurzel $x = b$, und, wenn man b in die Form eines nicht kürzbaren Bruches $b = \frac{p}{q}$ bringt, so erhält man

$$\frac{p^3}{q^3} = \frac{m}{n}$$

und daher

$$p^3 = m, \; q^3 = n, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Im besonderen ist die Gleichung $x^3 - m = 0$, wo m eine ganze Zahl ist, irreduzibel, wenn m nicht der Kubus einer ganzen Zahl ist; also sind die Gleichungen

$$x^3 - 2 = 0, \quad x^3 - 3 = 0, \quad x^3 - 4 = 0, \quad x^3 - 5 = 0,$$
$$x^3 - 6 = 0, \quad x^3 - 7 = 0, \quad x^3 - 9 = 0, \quad \text{usw.}$$

irreduzibel, während die Gleichungen

$$x^3 - 8 = 0, \quad x^3 - 27 = 0, \quad \text{usw.},$$

wo 8, 27, ... die Kuben der ganzen Zahlen 2, 3, ... darstellen, reduzibel sind.

Nun beweist man in der Theorie der algebraischen Gleichungen:

Eine irreduzible algebraische Gleichung, deren Grad nicht eine Potenz von 2 ist, ist durch Quadratwurzeln nicht lösbar (vgl. Art. V, § 3).

Also ist die Gleichung der Verdoppelung des Würfels

$$x^3 - 2 = 0$$

durch Quadratwurzeln nicht lösbar.

Daher (vgl. Art. IV, § 8) läßt sich der Ausdruck, der irgend eine Lösung der Gleichung $x^3 - 2 = 0$ darstellt, mit Hilfe von Geraden und Kreisen nicht konstruieren, also ist es unmöglich, die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels allein mit Hilfe von Geraden und Kreisen zu lösen.

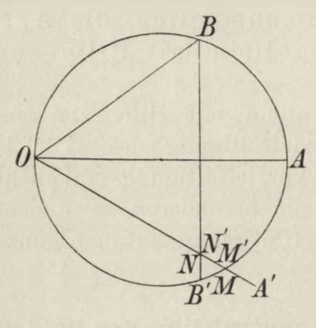
Und allgemeiner: es ist unmöglich, allein mit Hilfe von Geraden und Kreisen die Aufgabe der Vervielfältigung des Würfels in allen den Fällen zu lösen, in denen die Vervielfältigungszahl nicht der Kubus einer rationalen Zahl ist (d. h. im besonderen einer Zahl der natürlichen Zahlenreihe, wenn die Vervielfältigungszahl eine ganze Zahl ist).

§ 2. Methode des Archytas zur Konstruktion der beiden mittleren Proportionalen. Die Geschichtschreiber der Mathematik sind sämtlich der Ansicht, daß man die erste der zahlreichen Lösungen dieser Aufgabe dem Archytas von Tarent (geb. um 430 v. Chr.) verdankt; diese Lösung ist sehr bemerkenswert, wenn auch von zweifelhaftem praktischen Werte. Montucla[1]), der ihr jede Bedeutung für die Praxis abspricht, bemerkt, daß sie wegen ihres Scharfsinns in hohem Maße befriedigt und eine vorteilhafte Meinung von dem Genie ihres Erfinders erweckt. Sie verdient eine besondere Erwähnung, weil sie sich von allen später ausgedachten Lösungen derselben Aufgabe wesentlich unterscheidet. In dem Kommentar des Eutokius zu dem zweiten Buche von Archimedes' Werk „Von der Kugel und dem Zylinder“ wird von ihr berichtet, und Loria und Zeuthen erläutern sie in ihren Werken „Le scienze esatte nell' antica Grecia“ und „Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter“, auf die wir uns später öfter beziehen werden. Die hier folgende Erläuterung ist in dem Buche „Lezioni di Algebra elementare“ von G. Bellacchi (Firenze 1864, 2. Bd., pg. 134, 135) enthalten.

Ist in einer Ebene α ein Kreis gezeichnet, dessen Durchmesser OA gleich der größeren Strecke a (vgl. pg. 190) ist, und in diesen Kreis von O aus eine Sehne OB gleich der kleineren Strecke b eingetragen (Fig. 75), so konstruierte Archytas den Kreiszylinder über dem Kreise OAB, ferner den Kegel, der durch Rotation von OB um OA entsteht, endlich die Rotationsfläche, die dadurch entsteht, daß der über OA als Durchmesser in der zu α normalen Ebene COA (wo C ein Punkt der in O auf α errichteten Normalen ist) konstruierte Halb-

1) Vgl. Histoire des recherches sur la quadrature du cercle avec une addition concernante les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Paris 1831, pg. 223 f.

kreis sich um OC dreht. Diese beiden Rotationsflächen schneiden den Zylinder in zwei Linien; ist M einer ihrer Schnittpunkte und M' seine Projektion auf die Ebene α, so sind OM und OM' die beiden mittleren Proportionalen zu a und b.



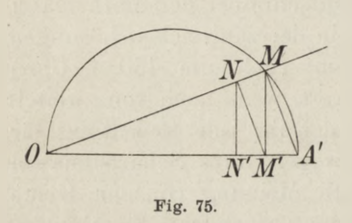


Fig. 75.

In der Tat, da M auf der Zylinderfläche liegt, so wird seine Projektion M' dem Kreise OAB angehören, und der durch M gehende meridiane Halbkreis der zweiten Rotationsfläche wird die Gerade OM' in einem Punkte A' treffen, so daß $OA' = OA$ ist. Fällt man dann von B aus die Normale auf die Gerade OA, die den Kreis OAB in B' und die Gerade OM' in N' treffen mag, so wird die durch BB' normal zu OA gelegte Ebene den Rotationskegel in einem Kreise vom Durchmesser BB' und die Erzeugende OM dieses Kegels in einem Punkte N normal über N' treffen. Daher ergeben sich die Relationen:

$$ON = OB = b; \quad NN'^2 = BN' \cdot N'B' = ON' \cdot N'M'.$$

Also hat das Dreieck $OM'N$ bei N einen rechten Winkel, und die Gerade NM' ist zu MA' parallel. Da nun auch das Dreieck $OM'M$ rechtwinklig ist, so erhält man die Reihe gleicher Verhältnisse:

$$ON : OM' = OM' : OM = OM : OA',$$

d. h.

$$b : OM' = OM' : OM = OM : a,$$

und daher sind OM' und OM die beiden mittleren Proportionalen zu b und a.

§ 3. Verdoppelung des Würfels mit Hilfe von Kegelschnitten. Methoden des Menächmus. Dem griechischen Geometer Menächmus (um 300 v. Chr.) verdankt man die beiden folgenden Lösungen der Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen.

1. Wenn a, b die beiden gegebenen Strecken sind, so konstruieren wir eine erste Parabel MAN von dem Parameter a (Fig. 76) und eine zweite Parabel RAS von dem Parameter b, die denselben Scheitel wie die erste hat und deren Achse AY auf der Achse AX der ersten normal steht. Die Koordinaten OP, OQ des Schnittpunktes

dieser beiden Parabeln sind die beiden mittleren Proportionalen zu den gegebenen Strecken a, b. In der Tat, da

$$AP = OQ$$

und

$$AQ = OP,$$

so haben wir

$$OP^2 = a \cdot AP$$

und

$$AP^2 = b \cdot OP,$$

mithin

$$\frac{a}{OP} = \frac{OP}{AP} = \frac{AP}{b},$$

oder

$$\frac{a}{OP} = \frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{b}, \text{ w. z. b. w.}$$

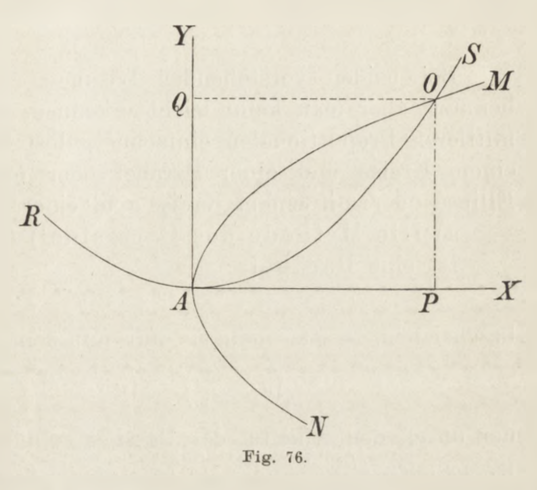
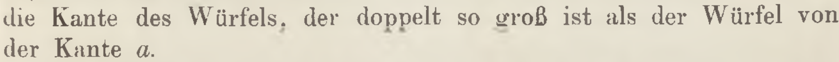


Fig. 76.

Wenn im besondern $b = 2a$ ist, so ist die Strecke OP die Kante des Würfels, der doppelt so groß ist als der Würfel von der Kante a.



2. Sind wieder a, b die beiden gegebenen Strecken, so konstruieren wir eine Parabel MAN von dem Parameter a und die gleichseitige Hyperbel $xy = ab$, welche die Achse AX der Parabel und die dazu im Scheitel errichtete Normale AY zu Asymptoten hat; SBT (Fig. 77) sei ein Zweig dieser Hyperbel. Dann sind die Koordinaten des Schnittpunktes der Parabel und der Hyperbel die beiden mittleren Proportionalen zu den beiden gegebenen Strecken a, b. In der Tat, da

$$BD^2 = a \cdot AD, \; AD \cdot BD = ab$$

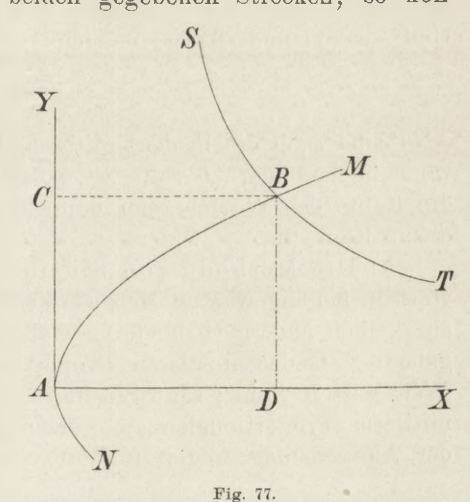


Fig. 77.

und

$$AD = BC,$$

so ist

$$\frac{a}{BD} = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{b}, \text{ w. z. b. w.}$$

Wenn im besondern $b = 2a$ ist, so ist die Strecke BD die Kante des Würfels, der doppelt so groß ist als der Würfel, der a zur Kante hat.

Bei beiden vorstehenden Lösungen wurden zwei Kegelschnitte benutzt; aber man kann leicht erkennen, daß die Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen einfacher gelöst werden kann, entweder mit einem Kreise und einer Parabel oder mit einem Kreise und einer Ellipse oder mit einem Kreise und einer Hyperbel.

a) Die Methode des Cartesius[1]) (1596—1650).

Ist eine Parabel

$$x^2 = ay \tag{1}$$

beschrieben, so hat man sie nur mit dem Kreise

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}, \tag{2}$$

der durch den Scheitel der Parabel geht und dessen Mittelpunkt die Koordinaten $\frac{b}{2}, \frac{a}{2}$ hat, zu schneiden. Denn aus (2) folgt:

$$x^2 + y^2 - bx - ay = 0$$

und daraus, infolge von (1):

$$y^2 = bx. \tag{3}$$

Und aus (1) und (3) ergibt sich

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Also sind x, y die beiden mittleren Proportionalen zu a und b, und wenn im besondern $b = 2a$ ist, so ist die durch x dargestellte Strecke die Kante des Würfels, der doppelt so groß ist als der Würfel, der a zur Kante hat.

b) Die Methode von Slusius.[2]) Es ist auch interessant, die von Slusius angewandte Methode kennen zu lernen, besonders weil wir auf keinen andern Geometer gestoßen sind, der zur Lösung der Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen die Ellipse benutzt hat. „Wir wissen wohl", sagt Slusius selbst, „daß die Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen auf kürzere Weise gelöst werden kann, aber der Abwechslung wegen und um ein Beispiel für die Tragweite der

1) Vgl. La Géométrie de René Descartes, nouvelle édition, Paris, A. Hermann, 1886, pg. 75.

2) Vgl. Renati Francisci Slusii Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et per infinitas hyperbolas vel ellipses et per quamlibet exhibitae, ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curvas usw. Leodii Eburonum, 1668.

Methode zu geben, wollen wir sie auseinandersetzen.“ Bemerkenswert ist auch die ganz elementare Form, in der Slusius seine Methode darlegt, die darum notwendigerweise weitschweifig wird, ohne dadurch jedoch für diese unsere Abhandlung über Fragen der Elementargeometrie weniger interessant zu werden.

Wir schicken drei Hilfssätze voraus; die ersten beiden sind ohne weiteres einleuchtend, den dritten werden wir kurz erläutern.

M N H O L

Fig. 78.

Hilfssatz 1. Wenn man auf der Strecke ML (Fig. 78) die beiden gleichen Strecken MN, OL abschneidet und zwischen N und O irgend einen Punkt H annimmt, so ist die Differenz zwischen dem Rechtecke aus MH und HL und dem Rechtecke aus MN und NL gleich dem Rechtecke aus NH und HO.

E G Q F R

Fig. 79.

Hilfssatz 2. Wenn in der Strecke ER (Fig. 79) die Punkte G, Q, F so angenommen werden, daß $ER:EF = EQ:EG$ ist, so verhält sich auch EQ zu EG wie das aus EF und QR gebildete Rechteck zu dem aus EF und GF gebildeten Rechtecke. (In der Tat folgt aus der Voraussetzung: $ER - EQ : EF - EG = EQ : EG$ d. h. $QR:GF = EQ:EG$, also $EQ:EG =$ Rechteck $(EF \cdot QR)$: Rechteck $(EF \cdot GF)$).

Hilfssatz 3. Wenn in einen Kreis ein Rechteck $ABCD$ einbeschrieben und eine Normale EF zu AB so gezogen ist, daß das aus AE und AB gebildete Rechteck gleich dem über EF errichteten Quadrate ist, dann bilden die vier Strecken AD, AE, EF, AB in der hingeschriebenen Ordnung eine geometrische Reihe.

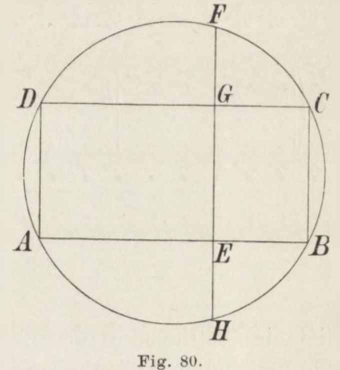


Fig. 80.

In der Tat, wenn H der zweite Schnittpunkt von EF mit dem Kreise ist, so ist das Rechteck aus EF und GF gleich dem Rechtecke aus EF und HE und daher gleich dem Rechtecke aus AE und EB. Aber nach Voraussetzung ist das Rechteck $(AB \cdot AE)$ oder die Summe des Rechtecks $(AE \cdot EB)$ und des Quadrates über AE gleich dem Quadrate von EF, d. h. gleich der Summe der beiden Rechtecke $(EF \cdot GF)$ und $(EF \cdot EG)$. Subtrahiert man die beiden gleichen Rechtecke $(AE \cdot EB)$ und $(EF \cdot GF)$, so

bleibt übrig, daß das Quadrat über AE dem Rechtecke $(EF \cdot EG)$ gleich ist, oder

$$EG : AE = AE : EF,$$

d. h.

$$AD : AE = AE : EF.$$

Außerdem ist nach Voraussetzung

$$AE : EF = EF : AB,$$

also

$$AD : AE = AE : EF = EF : AB, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Mit Hilfe dieser Sätze kommt Slusius zu der Lösung der Aufgabe, mit Hilfe des Kreises und der Ellipse die beiden mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Strecken zu finden, und zwar auf unzählige Arten.

Es seien x, y die beiden gegebenen Strecken, und es sei $x > y$. Man nehme (Fig. 81) $AB = x$ und rechtwinklig dazu $AD = y$, vervollständige das Rechteck $ABCD$ und beschreibe den Kreis um das Rechteck. Dann nehme man irgendwo auf der Geraden AD einen Punkt P an und ziehe PK parallel zu AB, so daß PK die vierte Proportionale zu AP, AD, AB ist. Nun vervollständige man das Rechteck $AJKP$, halbiere die einander gegenüberliegenden Seiten AP und JK in N und O, verbinde N mit O und konstruiere auf NO den Punkt L so, daß das aus NL und OL gebildete Rechteck sich zu dem Quadrate über OK verhält wie AD zu AP. Dann mache man MN gleich OL und beschreibe über ML als großer Achse

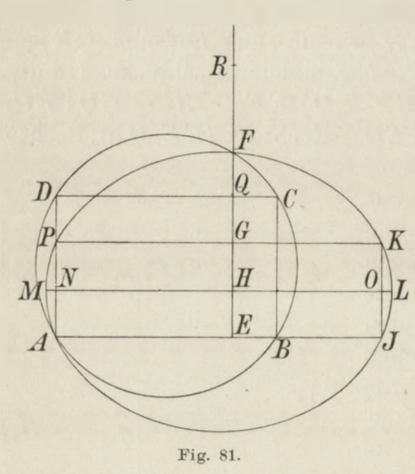


Fig. 81.

diejenige Ellipse, in der das Quadrat der Ordinate zu dem Rechtecke aus den beiden (durch den Fußpunkt der Ordinate bestimmten) Stücken der großen Achse in demselben Verhältnisse steht wie AP zu AD. Diese Ellipse wird auf Grund ihrer Konstruktion durch A, J, P und K gehen und den Kreis überdies in einem Punkte F schneiden, und durch diesen Punkt wollen wir eine Normale zu AB ziehen, die die Geraden DC, PK, NO in den Punkten Q, G, H trifft. Die vier Strecken AD, AE, EF, AB bilden dann eine geometrische Reihe.

Nämlich aus der Konstruktion der Ellipse folgt:

$$HF^2 : NP^2 = MH \cdot HL : MN \cdot NL$$

oder

$$HF^2 : HG^2 = MH \cdot HL : MN \cdot NL,$$

daher

$$(HF^2 - HG^2) : HG^2 = (MH \cdot HL - MN \cdot NL) : MN \cdot NL,$$

und infolge des Hilfssatzes 1):

$$EF \cdot GF : HG^2 = NH \cdot HO : MN \cdot NL$$

oder

$$EF \cdot GF : NH \cdot HO = NP^2 : MN \cdot NL,$$

d. h. infolge der Konstruktion

$$EF \cdot GF : NH \cdot HO = AP : AD = EG : EQ.$$

Verlängert man jetzt EF bis R, so daß

$$EG : EQ = EF : ER$$

ist, so folgt aus dem Hilfssatze 2)

$$EG : EQ = EF \cdot GF : EF \cdot QR,$$

also

$$EF \cdot GF : NH \cdot HO = EF \cdot GF : EF \cdot QR,$$

daher sind die beiden Rechtecke $(NH \cdot HO)$ und $(EF \cdot QR)$ einander gleich. Nun ist

$$\text{Rechteck } (EF \cdot QF) = \text{Rechteck } (AE \cdot EB)$$

und darum ist

Rechteck $(EF \cdot QR)$ — Rechteck $(EF \cdot QF)$, d. h. Rechteck $(EF \cdot FR)$ gleich

Rechteck $(AE \cdot EJ)$ — Rechteck $(AE \cdot EB)$, d. h. Rechteck $(AE \cdot BJ)$.

Also ergibt sich

$$FR : BJ = AE : EF. \tag{1}$$

Ferner ist infolge der Konstruktion

$$ER : EF = EQ : EG = AD : AP \tag{2}$$

und

$$AD : AP = PK : AB$$

oder

$$AD : AP = AJ : AB. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$ER : EF = AJ : AB$$

und hieraus, wenn man auf beiden Seiten 1 subtrahiert,

$$FR : BJ = EF : AB$$

und also infolge von (1)

$$AE : EF = EF : AB.$$

Daher ist das Rechteck ($AE \cdot AB$) gleich dem Quadrate über EF; also bilden, nach dem Hilfssatze 3), die Strecken AD, AE, EF, AB eine geometrische Reihe, w. z. b. w.

Wenn man den Punkt P auf der Verlängerung von AD angenommen hätte, so wäre der Beweis ganz ähnlich gewesen. Da man also den Punkt P irgendwo auf der Geraden AB annehmen darf, so ist es klar, daß man beliebig viele Ellipsen erhalten kann, die alle zur Lösung der Aufgabe geeignet sind.

c) Die Methode von Grégoire[1]) (1638—1675).

Die Grégoiresche Konstruktion wurde in folgendem Satze ausgesprochen: „Die Hyperbel, die durch einen Eckpunkt eines Rechtecks geht und diejenigen Seiten des Rechtecks, die sich nicht in diesem Eckpunkte schneiden, zu Asymptoten hat, schneidet den dem Rechtecke umbeschriebenen Kreis in einem Punkte, dessen Abstände von den Asymptoten die mittleren Proportionalen zu zwei aufeinanderfolgenden Seiten des Rechtecks sind.“ Dieser Satz ist nur der geometrische Ausdruck für die leicht nachzuweisende analytische Eigenschaft, daß „die durch die Gleichungen $xy = ab$ und $x^2 + y^2 = ay + bx$ (vgl. die Kreisgleichung pg. 198) dargestellten Kurven sich in einem Punkte x, y von der Art schneiden, daß

$$a : x = x : y = y : b.“$$

Bei den im gegenwärtigen Paragraphen dargelegten Lösungen sind fortwährend Kegelschnitte gebraucht worden. Es ist daher vom praktischen Standpunkte aus interessant zu sehen, wie diese Kurven in einem kontinuierlichen Zuge beschrieben werden können. Wir bringen infolgedessen einige Angaben über die

Mechanische Erzeugung der Kegelschnitte

und beginnen mit der wohlbekannten

a) Beschreibung der Ellipse. Wenn die Brennpunkte und die große Achse der Ellipse gegeben oder mit Hilfe der gegebenen Bestimmungsstücke konstruiert sind, so erhält man die Ellipse in einem kontinuierlichen Zuge, wenn man die Enden eines durchaus biegsamen und unausdehnbaren Fadens von der Länge der großen Achse in den beiden Brennpunkten befestigt und nun mit einem Stifte an

1) Vgl. Opus geometricum quadraturae circuli, Anvers 1668.

dem Faden entlang fährt, während dieser zwischen dem Stifte und den beiden Brennpunkten stets gespannt erhalten wird.

Zur kontinuierlichen Beschreibung der Ellipse sind auch besondere Apparate, sogenannte Ellipsenzirkel, konstruiert worden; einer davon, den man dem Leonardo da Vinci zuschreibt, beruht auf folgender Tatsache: Wenn eine Strecke mit ihren beiden Endpunkten auf zwei zueinander normalen Geraden gleitet, so beschreibt jeder ihrer Punkte eine Ellipse (abgesehen von dem Mittelpunkte, der einen Kreis beschreibt).

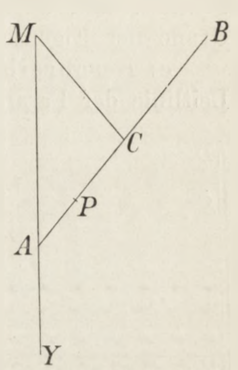


Fig. 82.

Ein ganz ähnlicher einfacher Typus eines Ellipsenzirkels ist folgender (Fig. 82): Es seien AC, BC, MC drei gleiche Strecken; die ersten beiden liegen auf derselben Geraden, MC ist mit dieser Geraden in C und mit der Geraden MY in M durch ein Gelenk verbunden. Wenn der Punkt A sich auf der Geraden MY bewegt, dann beschreibt der Punkt B die gerade Linie MB (normal zu MY) und jeder andere Punkt P von AB beschreibt eine Ellipse.

b) Beschreibung der Hyperbel. Sind die Brennpunkte und die reelle Achse der Hyperbel gegeben oder mit Hilfe der gegebenen Bestimmungsstücke konstruiert, so kann man die Hyperbel auf folgende Weise in einem kontinuierlichen Zuge beschreiben. Man bringe (Fig. 83) den einen Endpunkt eines Lineals in den einen Brennpunkt F, so daß er sich um diesen Punkt drehen kann, und befestige an dem anderen Endpunkte D des Lineals das eine Ende eines durchaus biegsamen und unausdehnbaren Fadens, dessen Länge gleich der Differenz zwischen der Länge des Lineals und der reellen Achse ist; das andere Ende dieses Fadens befestige man in dem anderen Brennpunkte F'. Spannt man dann den Faden mit einem Stifte M in der Weise, daß er zu einem Teile dem Lineale anliegt, und dreht man dabei das Lineal um F, so beschreibt der Stift M eine Hyperbel. Denn für jede Lage des Stiftes M ist:

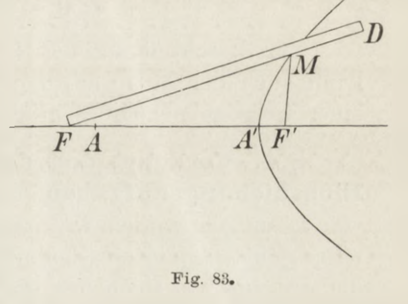


Fig. 83.

$$FM - F'M = FD - (DM + MF') = AA'.$$

Andere besonders einfache Beschreibungsarten lassen sich für

einige besondere Hyperbeln angeben, z. B. für die gleichseitige Hyperbel auf Grund ihrer Erzeugung durch zwei invers kongruente Strahlenbüschel, und auch für die Hyperbel von der Exzentrizität 2 auf Grund der Eigenschaft, von der wir im § 13 sprechen.

c) Beschreibung der Parabel. Sind der Brennpunkt und die Leitlinie der Parabel gegeben oder mit Hilfe der gegebenen Stücke konstruiert, so nehme man ein rechtwinkliges Dreieck SQR (Fig. 84) und befestige an demjenigen seiner Eckpunkte, an dem sich der kleinere Winkel befindet, also an R, das Ende eines durchaus biegsamen und unausdehnbaren Fadens von der Länge der größeren Kathete und das andere Ende dieses Fadens befestige man im Brennpunkte F. Legt man dann an die Leitlinie ED ein Lineal und schiebt man die kleinere Kathete des genannten Dreiecks so an diesem Lineal entlang, daß ein Stift M, der an QR entlang fährt, den genannten Faden immer gespannt hält, dann beschreibt der Stift M eine Parabel. Denn in jeder Lage von M ist:

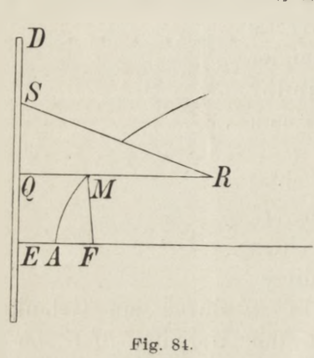


Fig. 84.

$$QM = QR - MR = MF.$$

Zur Beschreibung der Parabel in einem kontinuierlichen Zuge kann auch der Integraph dienen (vgl. Art. VIII), indem man von einer Geraden als Differentialkurve ausgeht.

§ 4. Verdoppelung des Würfels mit Hilfe der Konchoide. Einschiebungsaufgaben. Zum besseren Verständnis dieser Gruppe von Lösungen wollen wir einen Augenblick bei einer historisch und wissenschaftlich interessanten Klasse von Aufgaben verweilen, auf die die griechischen Geometer gestoßen sind und die heutzutage mit dem Namen „Einschiebungsaufgaben" bezeichnet werden.

„Unter einer Einschiebung", schreibt Zeuthen[1]), „wird im allgemeinen die Konstruktion einer Strecke verstanden, deren Endpunkte auf gegebenen Linien liegen und die selbst oder in ihrer Verlängerung durch einen gegebenen Punkt geht. Sie läßt sich einigermaßen leicht mechanisch ausführen durch ein Lineal (oder ein gefaltetes Stück Papier), auf das man zwei Marken im Abstande der gegebenen Strecke abgetragen hat. Dieses Lineal dreht man um den festen Punkt, indem man es gleichzeitig so verschiebt, daß die eine

1) H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen, 1896, pg. 80.

Marke einer der gegebenen Linien folgt, und mit einer solchen Bewegung fährt man so lange fort, bis die andere Marke sich auf der zweiten gegebenen Linie befindet."

„Die Zurückführung einer Konstruktion auf eine Einschiebung ohne genauere Angabe, wie diese auszuführen ist, kommt schon oft in der griechischen Geometrie vor."[1]) „Das kann man dahin deuten, daß es eine Zeit gegeben hat, wo man die Einschiebung als ein Konstruktionsmittel anerkannte, das unmittelbar bei geometrischen Konstruktionen neben Zirkel und Lineal angewandt werden dürfe."

„Wegen des theoretischen Zieles, das die Griechen mit ihren Konstruktionen verfolgten, begnügten sie sich jedoch nicht lange mit dieser mechanischen Leichtigkeit. Da man überdies, um auf möglichst wenigen Voraussetzungen bauen zu können, auch so wenige anerkannte Konstruktionsmittel haben mußte, als nur möglich war, so wurde die unmittelbare Ausführung der Einschiebungen bald überall dort verdrängt, wo sie sich durch Zirkel und Lineal, die einzigen Konstruktionsmittel, die in Euklids Elementen Bürgerrecht erhalten, ausführen ließen. Möglicherweise sind ältere Anwendungen die Ursache, daß Apollonius zwei Bücher über Einschiebungen geschrieben hat, die, wie wir wissen, über die Ausführung dieser mit Hilfe von Zirkel und Lineal gehandelt haben.[2]) Er kann dadurch dem Mangel in älteren Werken haben abhelfen wollen, daß Aufgaben auf Ein-

---

1) So z. B. bei Hippokrates, wenn er die dritte seiner lunulae konstruiert (Loria, op. cit. I, No. 45), und bei Archimedes, wenn er die folgenden Aufgaben behandelt:

a. Es ist ein Durchmesser eines Kreises und der Endpunkt eines dazu normalen Radius gegeben; man soll eine Gerade von gegebener Länge so zwischen den Kreis und den verlängerten Durchmesser legen, daß ihre Verlängerung durch den genannten Endpunkt geht.

b. Es ist eine Sehne eines Kreises und ein Punkt des dazu gehörigen Kreisbogens gegeben; man soll eine Gerade von gegebener Länge zwischen die Sehne und den Ergänzungsbogen so legen, daß ihre Verlängerung durch den gegebenen Punkt geht (Loria, op. cit. II, No. 41).

2) Die von Apollonius behandelten Aufgaben sind die folgenden:

a. Es ist ein Halbkreis und eine Normale zu seinem Durchmesser gegeben, oder es sind zwei Halbkreise gegeben, deren Durchmesser sich auf derselben Geraden befinden; man soll zwischen diese beiden Linien eine Strecke von gegebener Größe legen, die nach einem Endpunkte des Durchmessers des (einen) Halbkreises gerichtet ist;

b. Es ist ein Parallelogramm gegeben, von dem eine Seite verlängert ist; man soll in den Außenwinkel eine Strecke von gegebener Größe einbeschreiben, deren Verlängerung durch einen der Eckpunkte geht, die der gegenüberliegenden Seite angehören.

c. Es ist ein Kreis der Lage nach gegeben; man soll in ihn eine Sehne von gegebener Größe eintragen, die nach einem gegebenen Punkte gerichtet ist.

Bei diesen Aufgaben werden zahlreiche Fälle unterschieden, die auf 125 Sätze und 28 Nebensätze führen (Loria, op. cit. II, No. 67).

schiebungen zurückgeführt sind, ohne daß eine solche Ausführung angegeben wird."

„Wo man die Einschiebungen nicht auf die Benutzung dieser anderen Konstruktionsmittel zurückgeführt hat, ja nicht hat zurückführen können, da ist eine theoretische Untersuchung der Einschiebung selbst erforderlich gewesen. Am besten hat dies geschehen können durch Aufstellung einer Definition und eine darauf gegründete Untersuchung derjenigen Kurve, die bei der oben beschriebenen mechanischen Konstruktion von dem einen Endpunkte der gegebenen Strecke durchlaufen wird, nämlich von dem, der nicht an die eine gegebene Linie gebunden ist. Durch die Schnittpunkte dieser Kurve mit der zweiten gegebenen Linie wird dann die Einschiebungsaufgabe gelöst. Eine solche Untersuchung ist auch, sogar nach Archimedes' Zeit, von Nikomedes in dem Falle vorgenommen worden, wo die erste der gegebenen Linien eine Gerade ist."

Methode des Nikomedes. Die von Nikomedes (etwa 250—150 v. Chr.) erfundene Kurve vierten Grades wurde von ihm wegen ihrer Ähnlichkeit mit einer Muschel Konchoide genannt. Die Erzeugung dieser Kurve ist äußerst einfach: man nehme eine Gerade AB (Fig. 85) und einen nicht auf ihr liegenden Punkt P an (die die Basis und der Pol der Konchoide heißen), ziehe durch den Pol irgend eine Gerade r und schneide auf ihr von ihrem Schnittpunkte mit der Basis aus nach beiden Seiten eine bestimmte Strecke ab (die das Intervall der Konchoide heißt), so daß man die Punkte D und D_1 erhält. Läßt man dann die Gerade r variieren, so daß sie die Lagen r', r'', r''', ... annimmt, während der Pol und die Basis fest bleiben und das Intervall konstant, so bildet der geometrische Ort der Punkte D, D_1, D', D_1', D'', D_1'', ... die aus zwei Zweigen bestehende Kurve vierten Grades, die den Namen Konchoide führt. Nimmt man den Pol P zum Anfangspunkte der Koordinaten, die durch P zur Basis gezogene Parallele zur x-Achse und die Normale dazu zur y-Achse, so ergibt sich als Gleichung der Konchoide

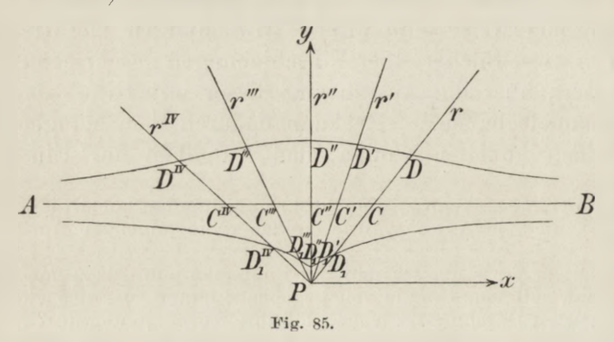


Fig. 85.

$$(x^2 + y^2)\,(y - a)^2 = y^2\, b^2,$$

wo a die Entfernung des Poles von der Basis und b das Intervall der Konchoide bezeichnet.

Nikomedes erdachte auch, um seine Erfindung praktisch verwendbar zu machen, das folgende Instrument, mit dem man einen Zweig der Konchoide (die sogenannte erste Konchoide der Alten) in einem kontinuierlichen Zuge beschreiben kann:

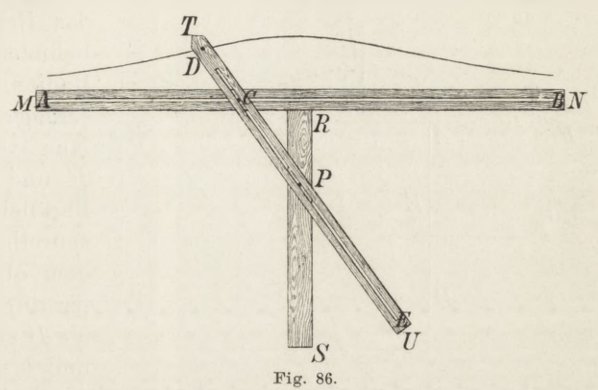


Fig. 86.

Es sei MN (Fig. 86) ein nicht zu dickes Lineal, in dessen Mitte sich ein Schlitz AB befindet, und rechtwinklig damit in irgend einem Punkte (z. B. im Mittelpunte) fest verbunden sei ein anderes Lineal RS, in das ein Stift P eingeschlagen ist. Es sei ferner TU ein bewegliches Lineal mit einem Schlitze, in dem der Stift P gerade Platz findet, ohne sich seitlich bewegen zu können. An irgend einem Punkte C dieses Schlitzes läßt sich ein anderer Stift an das Lineal TU festschrauben, der in dem Schlitze AB des ersten Lineals MN sich bewegen kann. In dem Lineal TU befindet sich außerdem bei T ein Loch D, in das sich ein Bleistift stecken läßt.

Es ist klar, daß, wenn man den Stift C in dem Schlitze AB sich bewegen läßt, das Lineal TU sich um P drehen und dabei ein in D steckender Bleistift den einen Zweig einer Konchoide beschreiben wird.

Mit Hilfe dieses Instrumentes (des „Konchoidenzirkels") kann man ohne weiteres die Aufgabe lösen, zwischen zwei Linien eine gegebene Strecke einzuschieben, deren Verlängerung durch einen gegebenen Punkt geht, wenn eine der gegebenen Linien eine Gerade ist.

Nun wollen wir zusehen, wie mit Hilfe der Nikomedischen Konchoide die Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen gelöst wird.

Es seien AB, AD (Fig. 87) die gegebenen Strecken, es sei $AB < AD$, und wir wollen $AB = 2a$, $AD = 2b$ setzen. Wir konstruieren das durch die gegebenen Strecken bestimmte Rechteck $ADCB$, halbieren die Strecke AD, verbinden ihren Mittelpunkt E mit C und bestimmen den Schnittpunkt F von EC mit

der Geraden AB. In dem Mittelpunkte G der Strecke AB errichten wir eine Normale und diese schneiden wir auf der Seite, auf der sich das Rechteck $ADCB$ nicht befindet, mit einem mit dem Radius b von B aus geschlagenen Kreisbogen in H. Nun verbinden wir H mit F und ziehen durch B die Parallele JB zu FH. Beschreiben wir dann (z. B. mit dem oben beschriebenen Apparate) die „erste" Konchoide, die H zum Pole, JB zur Basis und b zum Intervalle hat, so wird diese die Gerade AB in einem Punkte K treffen und es wird die Strecke MK gleich b sein. Wird dann mit L der Schnittpunkt der Geraden CK mit der Geraden AD bezeichnet, dann behaupten wir, daß die beiden Strecken DL, BK die beiden gesuchten mittleren Proportionalen sind.

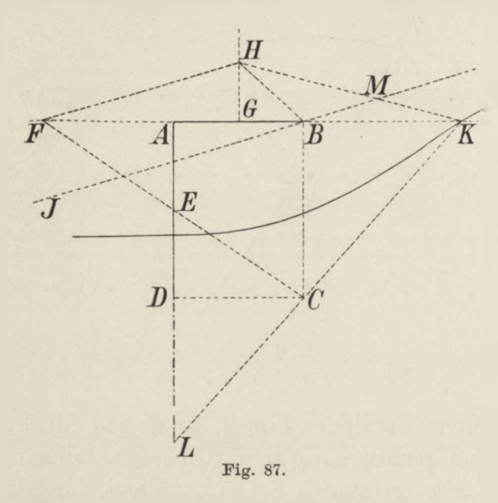


Fig. 87.

Um dies zu beweisen, setzen wir $DL = x$, $BK = y$.

Infolge der ausgeführten Konstruktionen ist

$$HG = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$GK = a + y$$

und daher

$$HK = \sqrt{HG^2 + GK^2} = \sqrt{b^2 - a^2 + (a+y)^2} = \sqrt{y^2 + b^2 + 2ay}.$$

Aber aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BMK, FHK ergibt sich

$$\frac{FK}{BK} = \frac{HK}{MK}$$

und da $MK = b$, $FK = 4a + y$ ist, so erhalten wir hieraus

$$\frac{4a + y}{y} = \frac{\sqrt{y^2 + b^2 + 2ay}}{b},$$

also

$$\frac{16a^2 + y^2 + 8ay}{y^2} = \frac{y^2 + b^2 + 2ay}{b^2}$$

oder

$$16a^2b^2 + b^2y^2 + 8ab^2y = y^4 + b^2y^2 + 2ay^3$$

oder

$$y^4 + 2ay^3 - 8ab^2y - 16a^2b^2 = 0$$

oder

$$y^3(y + 2a) - 8ab^2(y + 2a) = 0$$

d. h.

$$(y + 2a)(y^3 - 8ab^2) = 0$$

und, da $y + 2a$ von Null verschieden ist,

$$y^3 = 8ab^2. \tag{1}$$

Nun folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DLC und BCK

$$\frac{2a}{x} = \frac{y}{2b}$$

oder

$$xy = 4ab,$$

und hieraus weiter

$$x = \frac{4ab}{y},$$

daher

$$x^3 = \frac{64a^3b^3}{y^3},$$

also wegen (1)

$$x^3 = \frac{64a^3b^3}{8ab^2} = 8a^2b. \tag{2}$$

Also haben wir:

$$\begin{cases} xy = 4ab \\ y^3 = 8ab^2 \\ x^3 = 8a^2b. \end{cases}$$

Aus der ersten und der dritten Gleichung folgt

$$\frac{x^2}{y} = 2a \text{ oder } x^2 = 2ay, \tag{3}$$

und aus der ersten und der zweiten Gleichung folgt

$$\frac{y^2}{x} = 2b \text{ oder } y^2 = 2bx. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) aber folgt schließlich

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2b}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ist im besonderen $2a = l$ und $2b = 2l$, so ist x die Kante des Würfels, der doppelt so groß ist als der Würfel, der l zur Kante hat.

Verschiedene Beurteilung der Einfachheit der zur Lösung benutzten Kurven. Über den Wert der soeben dargelegten Lösung und ihre Vereinfachungen mögen folgende Bemerkungen sich an-

schließen. Descartes[1]) betrachtet, indem er sich mit den Linien beschäftigt, die in der Geometrie zur Lösung der Aufgaben benutzt werden, diejenige Kurve als die einfachste, welche durch eine Gleichung von niedrigstem Grade oder einfachster Zusammensetzung dargestellt wird; für Newton[2]) dagegen ist diejenige Kurve die einfachste, deren mechanische Beschreibung am leichtesten ist. Zwar billigt auch Newton die von Descartes aufgestellte Unterscheidung der Kurvengattungen nach den Dimensionen der Gleichungen; was aber nach ihm die Wahl einer Kurve zur Lösung einer Aufgabe bestimmen soll, das ist nicht die Gattung der Kurve, das heißt, der Grad ihrer Gleichung, sondern der Grad der Leichtigkeit, mit der sich die Kurve beschreiben läßt, und so sagt er: „Nicht die Gleichung, sondern die Beschreibung bringt die geometrische Kurve hervor... Nicht die Einfachheit der Gleichung, sondern die Leichtigkeit der Beschreibung gibt an, welcher Kurve bei der Konstruktion von Aufgaben der Vorzug zu geben ist. Wenn man in dieser Weise z. B. die Parabel mit dem Kreise vergleicht, so hat die Parabel zwar eine einfachere Gleichung als der Kreis, aber der Kreis, als geometrisch einfacher beschreibbar, wird der Parabel vorangestellt. Der Kreis und die Kegelschnitte sind hinsichtlich der Dimensionen der Gleichungen von derselben Ordnung, jedoch wird der Kreis bei der Konstruktion der Aufgaben nicht mit jenen zusammen aufgezählt, sondern der Einfachheit seiner Beschreibung wegen steigt er zu der tieferen Ordnung der Geraden hinab, so daß es gestattet ist, mit dem Kreise alles das zu konstruieren, was man mit der Geraden konstruieren kann."

Newton, der von der Grundlage ausgeht, daß die Arithmetik und die Geometrie zwei nicht miteinander zu vermengende Wissenschaften sind und daß nicht die Gleichungen, als Ausdrücke, die der Arithmetik angehören, sondern die Beschreibung der Figuren, als etwas der Geometrie Eigentümliches, den Maßstab dafür bilden soll, was in der Geometrie mehr oder weniger einfach ist, kommt zu dem Schlusse, daß man es ihm nicht als Fehler anrechnen darf, wenn er für die Lösung einer Aufgabe lieber diejenige Kurve wählt, die einfacher zu beschreiben ist. Und auf Grund dieses Kriteriums erteilt Newton

---

[1]) Vgl. op. cit. pg. 18 und 54, wo Descartes sich genau so ausspricht: „es ist zu bemerken, daß unter den einfachsten (Kurven) man nicht diejenigen verstehen soll, die am leichtesten beschrieben werden können, und auch nicht diejenigen, die die Konstruktion oder den Beweis der gestellten Aufgabe am leichtesten machen, sondern vorzüglich diejenigen, die von der einfachsten Gattung sind, die zur Bestimmung der gesuchten Größe dienen kann."

[2]) Vgl. Appendix de aequationum constructione lineari.

der Konchoide des Nikomedes hohes Lob, indem er von ihr sagt, daß sie „hinsichtlich der Einfachheit der Beschreibung keiner Kurve außer dem Kreise nachsteht", und er macht selbst von ihr zur Lösung vieler Aufgaben dritten und vierten Grades reichen Gebrauch.

Methode von Newton. So wird auch die Konstruktion der beiden mittleren Proportionalen von Newton auf die oben mit der Konchoide gelöste Aufgabe „zwischen zwei Gerade eine Strecke von gegebener Länge einzuschieben, deren Verlängerung durch einen gegebenen Punkt geht", zurückgeführt, jedoch in anderer Weise.

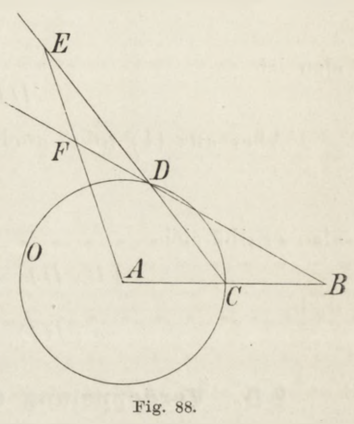


Fig. 88.

Es seien a, b die Strecken, zwischen die zwei mittlere Proportionalen eingeschoben werden sollen. Man nehme $AB = a$, halbiere AB in C, schlage um A den Kreis mit dem Radius AC und trage in ihm von C aus die Strecke $b = CD$ als Sehne ein. Wenn man dann in den von den Verlängerungen von CD und BD gebildeten Winkel EDF die Strecke EF gleich dem Radius $\frac{a}{2}$ so einschiebt, daß ihre Verlängerung durch A geht, so bilden die Strecken CD, DE, AF, AB eine geometrische Reihe.

Newton läßt diese Behauptung ohne Beweis; der hier folgende Beweis ist einer neuen Monographie von B. Carrara: Sui tre problemi classici degli antichi in relazione di recenti risultati della scienza[1]), entnommen.

Nach dem bekannten Satze von Ceva ist:

$$\frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{ED} \cdot \frac{EF}{AF} = 1,$$

also, da $CB = EF$ ist,

$$AB \cdot CD = ED \cdot AF. \tag{1}$$

Nun ist nach dem Satze von der Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis:

$$ED \cdot EC = EA^2 - AC^2 = (AC + AF)^2 - AC^2 = AB \cdot AF + AF^2,$$

also

$$ED\,(ED + DC) = AF\,(AB + AF)$$

[1]) Vgl. Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali, Pavia 1902 und 1903.

oder

$$ED^2\left(1+\frac{DC}{ED}\right)=AF\cdot AB\left(1+\frac{AF}{AB}\right).$$

Aber aus (1) folgt:

$$\frac{CD}{ED}=\frac{AF}{AB},$$

also ist

$$DE^2=AF\cdot AB.$$

Aber aus (1) folgt auch:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AF}{CD};$$

also ergibt sich

$$AB:DE=DE:AF=AF:CD$$

d. h.

$$a:DE=DE:AF=AF:b,\qquad \text{w. z. b. w.}$$

§ 5. Verdoppelung des Würfels mit Hilfe der Zissoide. Eine andere bemerkenswerte Kurve, deren Erfindung durch die Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen veranlaßt wurde, ist die Zissoide, die Diokles fand und zur Lösung der genannten Aufgabe benutzte.

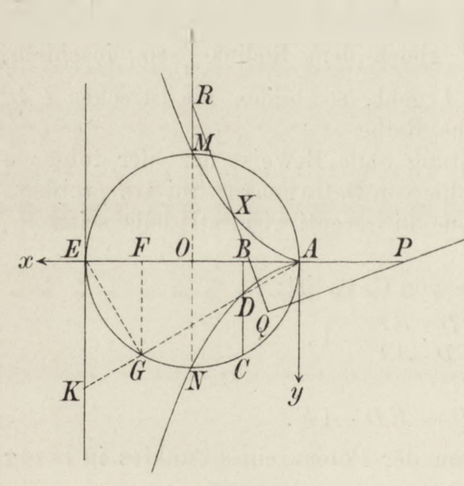


Fig. 89.

Es sei irgend ein Kreis vom Zentrum O und dem Radius OA (Fig. 89) gegeben; AE, MN seien zwei zueinander normale Durchmesser und B, F zwei Punkte des Durchmessers AE, die von dem Mittelpunkte O gleich weit entfernt sind. Durch B und F seien die Normalen BC und FG zu AE gezogen; läßt man dann $OB=OF$ variieren, dann beschreibt der Schnittpunkt D von AG mit BC die Kurve, welche Zissoide heißt. Nun ist es klar, daß, wenn man die Gerade AG verlängert, bis sie die in E an den Kreis gezogene Tangente in K schneidet, $AD=GK$ ist, und umgekehrt, wenn $AD=GK$ ist, dann ist auch $OB=OF$. Daher kann man die Zissoide auch in der Weise erzeugt denken, daß man durch A irgend eine Transversale zieht,

auf ihr von A aus ein Stück abschneidet, das gleich dem Stücke der Transversale ist, das zwischen dem Kreise und der im Gegenpunkte von A an den Kreis gezogenen Tangente liegt, und diese Transversale variieren läßt.

Die so erhaltene Kurve ist vom dritten Grade. Nimmt man A zum Anfangspunkte der Koordinaten, zur x-Achse den Durchmesser AE und zur y-Achse die Normale dazu, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABD, AEK und der Dreiecke ABD, EGK leicht ihre Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x},$$

wo r den Radius des gegebenen Kreises bezeichnet.

Newton hat dann angegeben, wie man auch die Zissoide leicht mechanisch in einem kontinuierlichen Zuge erzeugen kann.[1]) Man braucht dazu nur einen rechten Winkel, von dem ein Schenkel $QR = AE$ $(= 2r)$ und der andere beliebig lang ist. Bewegt man diesen rechten Winkel so, daß dieser zweite Schenkel beständig durch den Punkt P auf der Verlängerung von EA, der von A um r entfernt ist, geht, und der Endpunkt R des anderen Schenkels auf der Geraden NMR gleitet, so beschreibt der Mittelpunkt X von QR die Zissoide.

Wir wollen nun zusehen, wie man mit Hilfe der Zissoide des Diokles die Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen lösen kann.

Wir schicken eine Relation voraus, die aus der Betrachtung der Figur 89 sich leicht ergibt. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ABD, AFG folgt nämlich:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{FG}{AF}$$

und aus dem rechtwinkligen Dreiecke AEG:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{FG}{AF},$$

also ist

$$\frac{BD}{AB} = \frac{EF}{FG} = \frac{FG}{AF},$$

und da

$$FG = BC,\ EF = AB,\ AF = BE,$$

so ergibt sich die Kette gleicher Verhältnisse:

$$(1) \qquad \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BE}.$$

[1]) Vgl. Newton, op. cit.; vgl. auch C. Briot und J. C. Bouquet, Leçons de géométrie analytique, 16. Aufl., Paris 1897, pg. 29.

Also sind AB, BC die beiden mittleren Proportionalen zu BD, BE.

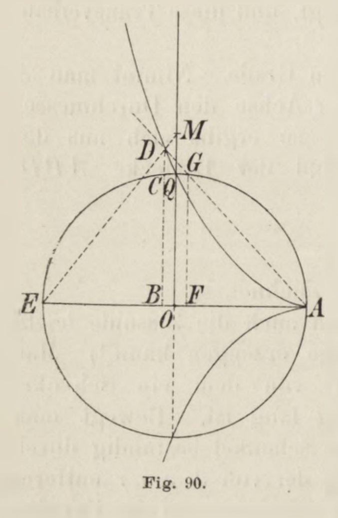


Fig. 90.

Es seien nun a, b ($a < b$) zwei beliebige Strecken, zu denen man die beiden mittleren Proportionalen konstruieren soll. Ist für irgend einen Kreis vom Durchmesser AE (Fig. 90) die Zissoide bereits gezeichnet, etwa mit der Spitze im Punkte A, so bestimmen wir die vierte Proportionale zu a, b und dem Radius OE des Kreises und tragen sie auf dem zu AE normalen Radius OQ bis M ab, so daß also

$$\frac{a}{b} = \frac{OE}{OM}. \tag{2}$$

Ist dann D der Schnittpunkt von EM mit der Zissoide und B seine Projektion auf AE, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke EOM, EBD:

$$\frac{OE}{OM} = \frac{BE}{BD}$$

und daher wegen (2):

$$\frac{BE}{BD} = \frac{a}{b}$$

oder

$$\frac{b}{BD} = \frac{a}{BE}. \tag{3}$$

Nun kann man die Kette gleicher Verhältnisse (1) auch in folgender Weise schreiben:

$$\frac{BD \cdot b}{AB \cdot b} = \frac{AB \cdot \frac{a}{BE}}{BC \cdot \frac{a}{BE}} = \frac{BC \cdot a}{BE \cdot a},$$

und dies kann man so anordnen:

$$\frac{b}{AB \cdot \frac{b}{BD}} = \frac{a \cdot \frac{AB}{BE}}{a \cdot \frac{BC}{BE}} = \frac{a \cdot \frac{BC}{BE}}{a}$$

oder nach (3):

$$\frac{b}{a \cdot \frac{AB}{BE}} = \frac{a \cdot \frac{AB}{BE}}{a \cdot \frac{BC}{BE}} = \frac{a \cdot \frac{BC}{BE}}{a}.$$

Also sind die beiden mittleren Proportinalen zu den gegebenen Strecken a, b:

$$a \cdot \frac{BC}{BE} \quad \text{und} \quad a \cdot \frac{AB}{BE},$$

d. h. die Strecken x, y, die man als vierte Proportionalen zu den Strecken BE, BC, a und BE, AB, a erhält. In dieser Weise also wird die Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen mit Hilfe des Lineals, des Kreises und der Zissoide des Diokles gelöst.

§ 6. Verdoppelung des Würfels mit Hilfe besonderer Apparate. Methode des Platon (429—347 v. Chr.). Es ist ein Rahmen gegeben, der aus drei Leisten MN, PQ, NQ (Fig. 91) besteht, von denen die beiden ersten zur dritten normal sind und auf der Innenseite eine Nute haben, so daß eine vierte Leiste RS in diesen Nuten gleiten und parallel zu NQ sich bewegen kann. Sind dann AB, BC die Strecken, zu denen man die beiden mittleren Proportionalen konstruieren soll (in der Figur ist AB doppelt so groß als BC angenommen, um direkt die mechanische Lösung der Aufgabe der Verdoppelung des Würfels nach dieser Platonischen Methode zu erhalten), so legen wir sie senkrecht zueinander und verlängern sie über den gemeinsamen Punkt B hinaus und dann bringen wir den oben beschriebenen Apparat in eine solche Lage, daß A sich auf der unteren Seitenfläche der Leiste RS und C sich auf der oberen Seitenfläche der Leiste NQ befindet und gleichzeitig die Verlängerungen von AB und BC durch die von den Leisten gebildeten Ecken D und E gehen. Dann sind BD und BE die beiden gesuchten mittleren Proportionalen zu BC und AB. In der Tat folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken CED und DAE:

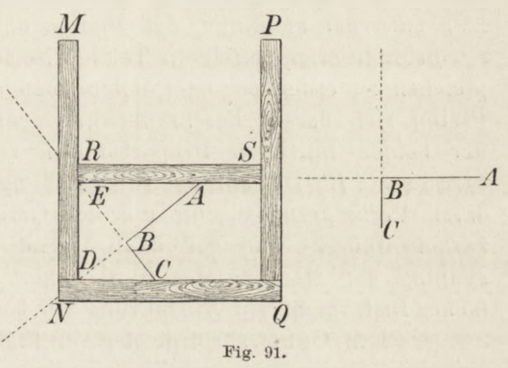


Fig. 91.

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BE}, \quad \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{AB}$$

also

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{AB}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Und wenn (wie in der Figur) $AB = 2\,BC$ ist, so ist BD genau die Kante des Würfels, der doppelt so groß ist als der Würfel, der BC zur Kante hat.

Diese Lösung gehört zu den besten für den praktischen Gebrauch. Nach Eutokius wird sie Platon zugeschrieben; andere halten sie für unecht, weil Eratosthenes gar nicht von ihr spricht und Platon diejenigen tadelt, die mit mechanischen Hilfsmitteln geometrische Aufgaben lösen, „da auf diese Weise das Vorrecht der Geometrie verdunkelt und zerstört wird und sie auf den praktischen Standpunkt zurückgebracht wird, während sie doch hoch erhoben werden und die ewigen und körperlosen Figuren ihrer Betrachtung unterwerfen soll." Man kann jedoch, wie Loria[1]) sagt, den Widerspruch zwischen dem Tadel und der Lösung Platons aufheben, indem man entweder annimmt, daß Platon, um die mechanischen Lösungen zu diskreditieren, durch die Tat bewiesen habe, wie leicht es sei, dergleichen zu erdenken, oder indem man die Voraussetzung macht, daß Platon sich darauf beschränkt habe, die Aufgabe der Konstruktion der beiden mittleren Proportionalen zu zwei zueinander normalen Strecken AB, BC auf die Einschiebung einer Strecke DE zwischen deren Verlängerungen, die auf den Geraden AE, CD normal steht, zurückzuführen, und daß dann irgend ein Kommentator unter Entstellung der Meinung des Philosophen von sich aus ein sehr einfaches Instrument zur Ausführung der Konstruktion hinzugefügt habe.

Nach M. Cantor würde der von Platon erdachte Apparat das erste bekannte Instrument zur Lösung einer geometrischen Aufgabe sein, während unter der Annahme, daß dieser Apparat unecht ist, das älteste bekannte geometrische Instrument das von Eratosthenes in seinem Briefe an den König Ptolemäus (vgl. die Einleitung pg. 189) beschriebene sein würde.

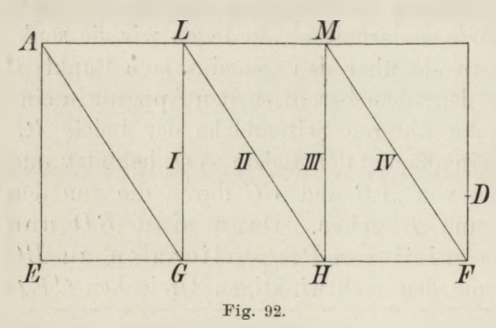


Fig. 92.

Methode des Eratosthenes. Der Apparat des Eratosthenes, der von Pappus Mesolabium genannt wurde (worauf dann jeder andere Apparat zur Lösung der Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen diesen Namen erhielt), beruht auf folgender Überlegung.[2])

[1]) Loria, op. cit. 1, pg. 116.
[2]) Loria, op. cit. 2, pg. 144 u. ff.

Es seien AE und DF ($AE > DF$) die beiden Strecken, zwischen die man die beiden mittleren Proportionalen einschalten soll. Man lege sie normal (Fig. 92) zu der Strecke EF, errichte auf dieser Strecke drei gleiche Rechtecke von der Höhe AE und ziehe in diesen die Diagonalen AG, LH, MF. Nun halte man das mittlere Rechteck fest und verschiebe das linke nach rechts und das rechte nach links, bis die Schnittpunkte B (der Geraden I und II) und C (der Geraden III und IV) mit A und D in gerader Linie liegen (Fig. 93). Dann wird behauptet, daß CH und BG die gesuchten mittleren Proportionalen sind.

In der Tat, wenn man mit K den Schnittpunkt der Geraden $ABCD$ mit EF bezeichnet, so ist:

$$EK : GK = AE : BG; \quad GK : HK = BG : CH; \quad HK : FK = CH : DF,$$

und da

$$EK : GK = GK : HK = HK : FK,$$

so ist

$$AE : BG = BG : CH = CH : DF,$$ w.z.b.w.

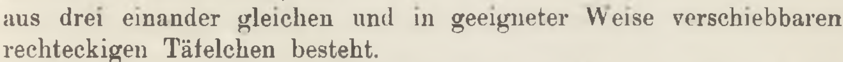


Fig. 93.

Auf Grund dieser Überlegung hat Eratosthenes ein Instrument konstruiert, das aus drei einander gleichen und in geeigneter Weise verschiebbaren rechteckigen Täfelchen besteht.

Es ist klar, daß diese Lösung sich verallgemeinern läßt, so daß beliebig viele mittlere Proportionalen zu zwei gegebenen Strecken gefunden werden können.

Methode des Descartes. Gleichfalls einen allgemeinen Zweck verfolgt die von Descartes[1]) angegebene Methode. Descartes konstruierte ein Instrument zur Konstruktion von Kurven, mit deren Hilfe man zu zwei gegebenen Strecken nicht nur zwei, sondern vier, sechs usw. mittlere Proportionalen finden kann. Dieses Instrument besteht aus einer Reihe von Linealen, die in folgender Weise miteinander verbunden sind. Die beiden Lineale YZ und YX sind um den Punkt Y drehbar. Das Lineal BC (das man sich wie die anderen Lineale von Γ-förmigem Querschnitte denken kann) ist zu YX normal und in B fest mit YX verbunden; DE, FG sind gleichfalls zu YX normal und können nur parallel mit sich selbst entlang YX verschoben werden; CD, EF, GH sind zu YZ normal und

[1]) Vgl. op. cit. pg. 17.

können nur parallel mit sich selbst entlang YZ verschoben werden. Ist der Winkel ZYX gleich Null, dann liegen die Punkte B, C, D, E, F, G, H sämtlich im Punkte A. Wird der Winkel geöffnet, dann wird CD durch BC vorwärts geschoben, DE durch CD, EF durch DE, FG durch EF, GH durch FG, usw. Dabei beschreibt der Punkt B einen Kreis und die Punkte D, F, H beschreiben Kurven von immer höherer Ordnung (vom vierten, zehnten, vierzehnten Grade usw.). Wenn man nun diese Kurven hat, so kann man mittlere Proportionalen in paarer Anzahl zu zwei gegebenen Strecken leicht konstruieren. Zur Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen ist nur die Kurve AD nötig, zur Konstruktion von vieren noch die Kurve AF, usw.

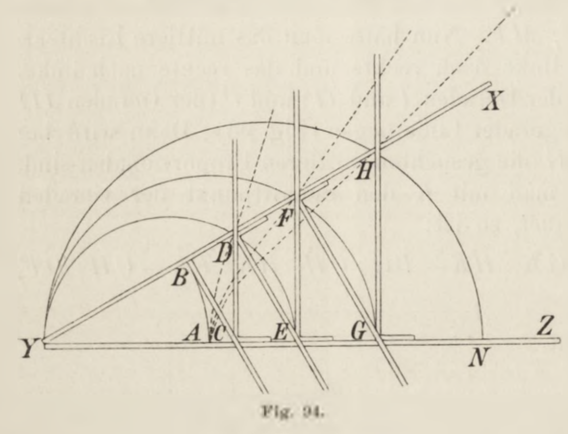


Fig. 94.

Es seien z. B. YA und YE die beiden gegebenen Strecken, zu denen man zwei mittlere Proportionalen konstruieren soll. Es ist

$$YC^2 = YB \cdot YD = YA \cdot YD$$

$$YD^2 = YC \cdot YE,$$

also

$$YA : YC = YC : YD = YD : YE,$$

d. h. YC und YD sind die beiden gesuchten Strecken.

Descartes spricht von dieser seiner Erfindung — in Übereinstimmung mit seiner besonderen Art, die Einfachheit von Linien, die zur Lösung von Aufgaben dienen, zu beurteilen (vgl. pg. 210) — in folgender Weise[1]): „Ich glaube nicht, daß es eine leichtere Manier gibt, um beliebig viele mittlere Proportionalen zu finden, und daß sich für irgend eine ein klarerer Beweis geben läßt, als es hier mit Hilfe der krummen Linien, die durch das oben beschriebene Instrument erzeugt werden, geschieht ... Aber da die krumme Linie AD von der zweiten Art ist und man zwei mittlere Proportionalen mit Hilfe der Kegelschnitte finden kann, die von der ersten Art

1) Op. cit. pg. 54, 55.

sind[1]), und da man auch vier oder sechs mittlere Proportionalen mit Hilfe von Linien finden kann, die nicht von so hoher Ordnung sind wie AF, AH, so wäre es ein geometrischer Fehler sie anzuwenden. . . ."

§ 7. Verdoppelung des Würfels mit Hilfe des Integraphen. Neuerdings ist eine Methode für die graphische Lösung der Aufgabe, den Würfel zu verdoppeln, durch den sogenannten Integraphen geliefert worden, dessen Zweck hauptsächlich darin besteht, zu einer vorgelegten Kurve die Integralkurve zu zeichnen, d. h. die graphische Darstellung des Integrals einer graphisch dargestellten Funktion zu geben (vgl. Art. VIII).

Dieses Instrument kann zur Lösung der Aufgabe der Verdoppelung des Würfels Verwendung finden, da man durch zweimalige Integration der Funktion $y = 6x$, die man durch die Gerade von der Gleichung $y = 6x$ dargestellt denken kann, die Funktion und also die Kurve $y = x^3$ erhält, und daher die Abszisse, die zu der Ordinate 2 (in der gewählten Maßeinheit, die von der des Instrumentes unabhängig ist) gehört, d.h. $\sqrt[3]{2}$.

§ 8. Allgemeines über Näherungskonstruktionen. Der Darstellung der bemerkenswerteren besonderen Methoden, um durch ein Näherungsverfahren allein mit dem Lineal und dem Zirkel die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels zu lösen, schicken wir einige allgemeine Betrachtungen über eine graphische Methode zur approximativen Konstruktion einer durch eine irrationale Zahl μ dargestellten Strecke voraus.[2])

Es ist bekannt, daß jede positive irrationale Zahl durch einen unendlichen Kettenbruch mit positiven ganzen Teilnennern dargestellt werden kann; es sei also die irrationale Zahl

$$\mu = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}},$$

1) Eine Kurve von nicht höherem als zweitem Grade nennt Descartes von der ersten Art; Kurven dritten und vierten Grades heißen von der zweiten Art, Kurven fünften und sechsten Grades von der dritten Art, usw.

2) Diese Methode verdankt man Sylvester; sie findet sich bei Novi, Algebra superiore, Firenze 1863, pg. 406 dargestellt. Vgl. auch F. Klein, Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I, autogr. Vorlesung, Leipzig 1896, pg. 17.

wo a_1, a_2, a_3, a_4, ... positive ganze Zahlen sind, und es seien

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots$$

die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche dieses Kettenbruchs die man erhält, wenn man den Kettenbruch bei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ abbricht. Es ist auch bekannt, daß zwischen den Näherungsbrüchen folgende Rekursionsformel besteht:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Nimmt man nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem an und denkt man das Netz aller Punkte von ganzzahligen positiven Koordinaten, so ist es klar, daß die Näherungsbrüche

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots$$

durch die trigonometrischen Tangenten der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ dargestellt werden, welche von den nach den Punkten $M_1 \equiv (p_1, q_1)$, $M_2 \equiv (p_2, q_2), \ldots, M_n \equiv (p_n, q_n), \ldots$ vom Anfangspunkte 0 aus gezogenen Strahlen $OM_1, OM_2, \ldots, OM_n, \ldots$ mit der x-Achse gebildet werden.

Nun wissen wir aus der Theorie der Kettenbrüche, daß die Werte der Näherungsbrüche sich immer mehr der durch den Kettenbruch dargestellten Zahl nähern und daß dabei im besondern die geradzahligen Näherungsbrüche (der zweite, vierte, ...) immer größer und die ungeradzahligen Näherungsbrüche (der erste, dritte, ...) immer kleiner bleiben als die durch den Kettenbruch dargestellte Zahl; wenn wir daher

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha$$

setzen, so können wir sagen, daß die Winkel $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-1}, \ldots$ sich beständig wachsend und die Winkel $\alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n}, \ldots$ sich beständig abnehmend dem Winkel α nähern. Konstruiert man also die Geraden $OM_1, OM_3, \ldots, OM_{2n-1}, \ldots$ und die Geraden OM_2, $OM_4, \ldots, OM_{2n}, \ldots$, so kann man der Geraden OM, die mit der x-Achse den Winkel α bildet, beliebig nahe kommen und daher auch mit beliebiger Annäherung die trigonometrische Tangente von α, d. h. die durch μ dargestellte Strecke bestimmen.

Wendet man diese allgemeine Methode auf die Irrationalzahl $\sqrt[3]{2}$, die sich in den Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}}}}$$

entwickeln läßt, an, so kann man auf elementare Weise und mit beliebiger Annäherung die Strecke $\sqrt[3]{2}$, d. h. die Kante des Würfels, der doppelt so groß ist als der Würfel von der Kante 1, finden.

In besonderen Fällen kann es zweckmäßig sein, irgend eine andere besondere Methode, die durch die Natur der gerade behandelten Frage gegeben ist, anzuwenden. Theoretisch wird immer eine Methode vorzuziehen sein, in der die Annäherung von der Zahl der ausgeführten Konstruktionen abhängt, da man in diesem Falle durch eine einfache Vermehrung dieser Konstruktionen die Annäherung bis auf einen sehr hohen Grad treiben kann. Aber praktisch wird eine Methode den Vorzug verdienen, bei der eine einfache bestimmte Konstruktion zu einem genügend genauen Resultate führt, d. h. zu einem Resultate, dessen Fehler mit den angewandten Instrumenten und unseren Sinnen nicht mehr wahrgenommen werden kann.

§ 9. Verdoppelung des Würfels durch elementare Näherungskonstruktionen. Methode des Apollonius (270—186 v. Chr.). Es seien AB, AC (Fig. 95) die beiden gegebenen Strecken, zu denen man die beiden mittleren Proportionalen finden soll. Man trage die beiden Strecken auf zwei zueinander normalen Geraden ab, konstruiere das durch sie bestimmte Rechteck $ACDB$, ziehe in diesem die Diagonalen und schlage von deren Schnittpunkte E aus denjenigen Kreis, dessen Schnittpunkte F, G mit den Verlängerungen von AB, AC (über B, C hinaus) eine durch D gehende Gerade bestimmen. Dann sind CG, BF die beiden gesuchten Proportionalen.

In der Tat, wenn EK, EH parallel zu AB, AC gezogen werden, dann ergibt sich leicht

$$AF \cdot BF + BH^2 = FH^2,$$

daher

$$AF \cdot BF + BH^2 + HE^2 = FH^2 + HE^2,$$

also

$$AF \cdot BF + BE^2 = FE^2.$$

Und ebenso ergibt sich

$$AG \cdot CG + EC^2 = EG^2.$$

Da nun $FE = EG$, so folgt

$$AF \cdot BF + BE^2 = AG \cdot CG + EC^2,$$

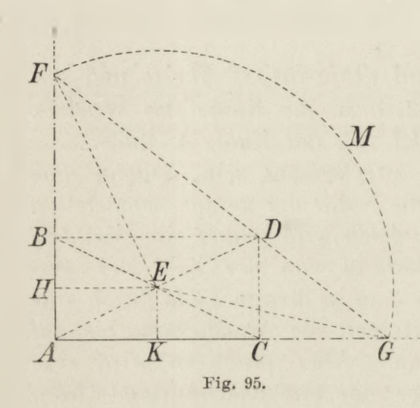


Fig. 95.

und da auch $BE = EC$, so ist

$$AF \cdot BF = AG \cdot CG$$

oder

$$\frac{AF}{AG} = \frac{CG}{BF}. \tag{1}$$

Nun folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke FAG, DCG:

$$\frac{AF}{AG} = \frac{CD}{CG} \tag{2}$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DCG, FBD:

$$\frac{CD}{CG} = \frac{BF}{BD}, \tag{3}$$

und aus (1), (2), (3) ergibt sich

$$\frac{CD}{CG} = \frac{CG}{BF} = \frac{BF}{BD}$$

oder

$$\frac{AB}{CG} = \frac{CG}{BF} = \frac{BF}{AC}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ist im besondern (wie in Fig. 95) $AC = 2 \cdot AB$, so ist CG die Kante des Würfels, der doppelt so groß ist als der Würfel, der AB zur Kante hat.

Dieses Apollonische Verfahren liefert eine Näherungsmethode für die Lösung unserer Aufgabe, insofern als der Radius EF des Kreises GMF, dessen Sehne FG durch den Punkt D geht, durch eine Konstruktion mit dem Lineal und dem Zirkel nicht zu bestimmen ist, man ihm aber durch Versuche beliebig nahe kommen kann.

Ganz ähnlich sind die Methoden, die Heron von Alexandrien (2. oder 3. Jahrh. v. Chr.) und Philo von Gadara (1. Jahrh. v. Chr.) zugeschrieben werden.

Methode von Vargiù. Wir übergehen die Mascheronischen Näherungsmethoden, die bereits im zweiten Artikel auseinandergesetzt

worden sind, und beschäftigen uns mit moderneren Näherungsmethoden für die Aufgabe, den Würfel zu verdoppeln; unter diesen verdienen die von G. J. Vargiù, G. Buonafalce, G. Boccali angegebenen Methoden besondere Erwähnung.

Die Methode von Vargiù[1]) läßt sich kurz folgendermaßen beschreiben: Wenn l die Kante des zu verdoppelnden Würfels und d die Diagonale einer Seite dieses Würfels ist, so konstruiere man die mittlere Proportionale m_1 zu l und d; darauf konstruiere man die mittlere Proportionale m_2 zu d und m_1, dann die mittlere Proportionale m_3 zu m_1 und m_2, ferner die mittlere Proportionale m_4 zu m_2 und m_3 usw.: die siebente der auf diese Weise gefundenen mittleren Proportionalen stellt mit großer Annäherung (sie ist um rund $\frac{1}{1000}$ zu klein) die Kante des Würfels dar, der doppelt so groß als der gegebene ist.

In der Tat, wenn $l = 1$ gesetzt wird und daher $d = 2^{\frac{1}{2}}$ ist, so haben wir:

$$m_1^2 = 1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}, \qquad m_1 = 2^{\frac{1}{4}};$$

$$m_2^2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot m_1, \qquad m_2 = 2^{\frac{1}{4}} \cdot m_1^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{8}};$$

$$m_3^2 = m_1 \cdot m_2, \qquad m_3 = m_1^{\frac{1}{2}} \cdot m_2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{16}};$$

$$m_4^2 = m_2 \cdot m_3, \qquad m_4 = m_2^{\frac{1}{2}} \cdot m_3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{11}{32}};$$

$$m_5^2 = m_3 \cdot m_4, \qquad m_5 = m_3^{\frac{1}{2}} \cdot m_4^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{21}{64}};$$

$$m_6^2 = m_4 \cdot m_5, \qquad m_6 = m_4^{\frac{1}{2}} \cdot m_5^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{43}{128}};$$

$$m_7^2 = m_5 \cdot m_6, \qquad m_7 = m_5^{\frac{1}{2}} \cdot m_6^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{85}{256}}.$$

Rechnet man aus, so erhält man

$$2^{\frac{85}{256}} = 1{,}25878\ldots$$

Nun ist

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots$$

Also stellt m_7 mit einem Fehler von rund $-\frac{1}{1000}$ die Kante des Würfels dar, der doppelt so groß ist als der Würfel von der Kante 1.

---

1) Vargiù, Sulla duplicazione del cubo e sulla multiplicazione di esso, Oristano 1877.

Methode von Buonafalce. G. Buonafalce[1]) hat sich in drei aufeinanderfolgenden Arbeiten mit der Aufgabe, den Würfel zu verdoppeln, beschäftigt und in der dritten, der vollständigsten, Arbeit vier graphische Näherungslösungen dieser Aufgabe gegeben. Wir beschränken uns darauf, hier die erste und die dritte dieser Lösungen anzugeben; die erste ist wegen der Einfachheit der Konstruktion, die andere wegen der erreichten Genauigkeit bemerkenswert.

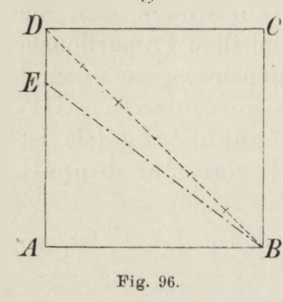


Fig. 96.

Die erste Lösung von Buonafalce (Fig. 96). Wenn AB die Kante und $ABCD$ eine Seite des gegebenen Würfels ist, so teilen wir die Diagonale BD dieses Quadrates in sechs gleiche Teile und tragen den sechsten Teil von D aus auf DA ab bis E. BE stellt dann mit einem Fehler von rund $-\frac{1}{1000}$ die Kante des Würfels dar, der doppelt so groß als der gegebene ist. Dies hat der Pater Secchi in der ersten Arbeit von Buonafalce in folgender Weise bewiesen:

Wird $AB = 1$ gesetzt, so ist $BD = \sqrt{2}$ und daher $DE = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Dann folgt:

$$EB = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{AB^2 + (AD - DE)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{74 - 12\sqrt{2}}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{37 - 6\sqrt{2}}.$$

Dies gibt ausgerechnet

$$EB = 1{,}25863\ldots,$$

und dieser Wert weicht von

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots$$

um rund $\frac{1}{1000}$ ab.

Die dritte Lösung von Buonafalce (Fig. 97). Wenn $ABCD$ eine Seite des gegebenen Würfels darstellt, so schlage man den Viertelkreis DKB, trage von B aus auf BA die Strecke $BE = \frac{1}{2} AK$ ab, dann von C aus auf CA die Strecke $CF = \frac{1}{4} BC$ und ziehe endlich die Gerade FE, die den Kreisbogen DKB in G schneiden mag:

1) G. Buonafalce, Sulla scoperta di un nuovo rapporto geometrico che serve alla soluzione del problema della duplicazione del cubo, Pisa 1876; zweite verbesserte und vermehrte Auflage, Pisa 1876; Duplicazione del cubo e quadratura del circolo, mit Zusätzen von Pieraccini, Pisa 1878.

dann stellt die Strecke DG mit einem Fehler von weniger als $\frac{2}{100000}$ im negativem Sinne die Kante des Würfels dar, der doppelt so groß als der gegebene ist.

Zum Beweise ziehe man FH und GL normal zu BC und FJ normal zu AB. Wird die Seite des Würfels wieder gleich 1 gesetzt, so folgt aus den angegebenen Konstruktionen:

$$EB = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}2071067\ldots,$$

$$FC = \tfrac{1}{4},$$

$$FH = CH = FC \sin 45^0$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}1767767\ldots$$

Fig. 97.

Nun ist

$$EJ = EB - FH, \quad JF = BC - FH$$

und da

$$EJ = JF \operatorname{cotg} JEF,$$

so folgt:

$$\operatorname{cotg} JEF = \frac{EB - FH}{BC - FH} = \frac{0{,}0303300\ldots}{0{,}8232233\ldots} = 0{,}0368430\ldots$$

Der Kürze wegen setzen wir $EB = m$, $\operatorname{cotg} JEF = n$, $GL = \cos DCG = x$, so daß $LC = \sin DCG = \sqrt{1 - x^2}$ ist.

Würde man von G aus die Normale auf AB fällen (dies ist in der Figur, um Unklarheiten zu vermeiden, nicht geschehen), so würde man ein kleines rechtwinkliges Dreieck erhalten mit einer Kathete gleich $EB - GL$ oder $LB \cdot \operatorname{cotg} JEF$; daher ist:

$$m - x = \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \cdot n$$

$$m - n - x = -n\sqrt{1 - x^2}$$

$$x^2(n^2 + 1) - 2(m - n)x + m(m - 2n) = 0,$$

woraus folgt

$$x = \frac{m - n \pm \sqrt{(m - n)^2 - (n^2 + 1)(m - 2n)m}}{n^2 + 1}$$

$$= \frac{m - n \pm n\sqrt{1 - m(m - 2n)}}{n^2 + 1}.$$

Setzt man hierin die Werte von m und n ein, so erhält man bei Benutzung des oberen Zeichens

$$x = \cos DCG = \frac{0{,}2065941\ldots}{1{,}0013574\ldots};$$

dies ergibt

$$DCG = 78^{0}5'36'',83\ldots$$

Dann folgt:

$$DG = 2 \sin \frac{DCG}{2} = 1{,}2599093\ldots,$$

während

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209\ldots$$

ist. Also weicht DG von der Kante des gesuchten Würfels um weniger als $\frac{2}{100000}$ ab.

Methode von Boccali.[1]) Bemerkenswert ist auch die Annäherung, die G. Boccali bei seiner Lösung der Aufgabe der Verdoppelung des Würfels erreicht hat. Boccali ist jedoch zu dieser Lösung auf einem ziemlich künstlichen Wege gekommen. Ich habe sie auf einem einfacheren Wege wiedergefunden und stelle diesen dar.

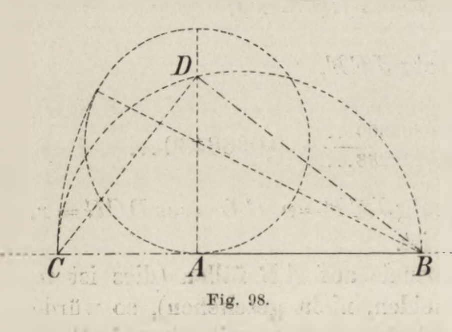


Fig. 98.

Ist AB (Fig. 98) die Kante des gegebenen Würfels, so konstruiere man in bekannter Weise die Seite des in den Kreis vom Radius AB eingeschriebenen Zehnecks und trage diese an BA bis C an. Schlägt man dann über CB als Durchmesser einen Halbkreis, der die in A zu CB errichtete Normale in D schneidet, dann ist die Kante des Würfels, der doppelt so groß ist als der gegebene, bis auf $+\frac{1}{10000}$ gleich

$$\tfrac{2}{3}(AC + BD).$$

Denn es ist

$$AC = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}6180339887\ldots$$

und

$$BD^2 = BA \cdot BC,$$

also

1) G. Boccali, Doppio cubo ed altre nuove scoperte geometriche in una semplice spirale poligona, Camerino 1884.

$$BD = \sqrt{1 \cdot \left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1{,}2720196495\ldots$$

Daher

$$\tfrac{2}{3}(AC + BD) = \tfrac{2}{3}(0{,}6180339887\cdots + 1{,}2720196495\cdots)$$
$$= \tfrac{2}{3}\cdot 1{,}8900536382\cdots = 1{,}2600357588\cdots$$

Da nun

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209\ldots$$

ist, so weicht der Wert von $\frac{2}{3}(AC + BD)$ von dem Werte von $\sqrt[3]{2}$ um wenig mehr als $\frac{1}{10000}$ ab. Wenn also die Kante des gegebenen Würfels z. B. zehn Meter betrüge, so würde die Kante des doppelten Würfels nur um ein Millimeter zu groß sein.

§ 10. Unmöglichkeit, die Aufgabe der Dreiteilung des Winkels auf elementare Weise zu lösen. Es sei φ der Winkel, den man in drei gleiche Teile teilen soll. Aus bekannten trigonometrischen Formeln geht hervor

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} - \operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{3}}{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{3}},$$

und wenn man daher $\operatorname{tg}\varphi = a$ und $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} = x$ setzt, so erhält man:

$$a = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2},$$

und dies ergibt die vollständige kubische Gleichung:

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0. \qquad (1)$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = y + a$, so erhält man die reduzierte Gleichung:

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0, \qquad (2)$$

die also durch die Differenz $x - a$, d. h. durch

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} - \operatorname{tg}\varphi$$

befriedigt wird.

Wir wollen beweisen, daß die Gleichung (2) im allgemeinen irreduzibel ist.

In der Tat, wenn sie reduzibel wäre, so müßte ihre linke Seite in ein Produkt von zwei Faktoren zerlegbar sein, von denen der eine

notwendig linear sein müßte, d. h. sie müßte sich in die Form

$$(y - \alpha)(y^2 + \beta y + \gamma)$$

bringen lassen, wo α, β, γ rationale Funktionen von a sind. Im besondern müßten, wenn a rational ist, α, β, γ rational sein, und wenn a eine ganze Zahl ist, so können wir nach einem Lemma von Gauß (Art. V, pg. 154) behaupten, daß das Trinom

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2),$$

falls es reduzibel ist, sich in ein Produkt

$$(y - \alpha)(y^2 + \beta y + \gamma)$$

zerlegen lassen müßte, wo α, β, γ ganze Zahlen sind. Also müßte jedem ganzzahligen Werte von a ein ganzzahliger Wert wenigstens einer der drei Wurzeln der Gleichung (2) entsprechen, und da $x = a + y$ ist, so müßte man auch für x einen ganzzahligen Wert erhalten. Aber man kann sich leicht davon überzeugen, daß, wenn z. B. $a = 2$, d. h. $\operatorname{tg} \varphi = 2$ ist, keiner der drei voneinander verschiedenen Werte

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi + 180^0}{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi + 2 \cdot 180^0}{3},$$

die den Winkeln φ, $\varphi + 180^0$, $\varphi + 2 \cdot 180^0$, deren Tangente 2 ist, entsprechen, eine ganze Zahl ist. In der Tat folgt in diesem Falle aus den trigonometrischen Tafeln:

$$\varphi = 63^0\ 26'\ 5'',81 \quad \text{(bis auf } \tfrac{1}{100} \text{ einer Sekunde)},$$

also

$$\frac{\varphi}{3} = 21^0\ 8'\ 41'',93 \quad \text{„}$$

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{180^0}{3} = 81^0\ 8'\ 41'',93 \quad \text{„}$$

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2 \cdot 180^0}{3} = 141^0\ 8'\ 41'',93 \quad \text{„}$$

und da

$$0 < \frac{\varphi}{3} < 45^0$$

ist, so ist

$$0 < \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} < 1;$$

ferner da

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2 \cdot 180^0}{3} > 135^0,$$

das Supplement dieses Winkels also kleiner als 45^0 ist, so liegt die Tangente dieses Winkels, in absolutem Werte genommen, auch zwischen 0 und 1. Endlich ergibt sich

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi + 180^0}{3} = 6{,}4112\ldots,$$

d. h.

$$6 < \operatorname{tg}\frac{\varphi + 180^0}{3} < 7.$$

Also ist die Gleichung (2) im allgemeinen irreduzibel, und da sie nicht vom Grade 2^m ist, so kann sie durch Quadratwurzelausdrücke nicht gelöst werden (Art. V); also läßt sich (Art. IV) mit dem Lineal und dem Zirkel die Strecke y nicht konstruieren und daher die Strecke x auch nicht. So ist bewiesen, daß es **im allgemeinen unmöglich ist, die Aufgabe der Dreiteilung des Winkels allein mit Hilfe des Lineals und des Zirkels zu lösen.**

Versuchen wir nun zu demselben Resultate zu gelangen, indem wir die Frage in einer anderen (etwas weniger elementaren) Weise betrachten.

Setzt man $\lambda = u + iv$, wo $u = \cos\varphi$, $v = \sin\varphi$ den Cosinus und den Sinus des Winkels φ bezeichnen, der in drei gleiche Teile zu teilen ist, und setzt man $z = x + iy$, wo

$$x = \cos\frac{\varphi}{3}, \quad y = \sin\frac{\varphi}{3}$$

ist, so folgt aus der bekannten Moivreschen Formel sofort die Gleichung

$$z^3 = \lambda,$$

und von dieser hängt also die Aufgabe der Dreiteilung ab.

Wir wollen zuerst beweisen, daß die Gleichung $z^3 = \lambda$ algebraisch irreduzibel ist, d. h. daß nicht identisch

$$z^3 - \lambda = \{z - f(\lambda)\}\{z^2 + \mu(\lambda)z + \nu(\lambda)\}$$

ist, wo f, μ, ν rationale Funktionen von λ sind.

In der Tat würde dann

$$f(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{X(\lambda)}$$

sein, wo Y, X zwei Polynome:

$$Y(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$X(\lambda) = b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \cdots + b_m$$

sind, und man würde dann identisch haben:

$$\frac{Y^3(\lambda)}{X^3(\lambda)} = \lambda.$$

Daß nun diese Gleichung nicht identisch, d. h. für jeden Wert von λ erfüllt sein kann, das geht offenbar daraus hervor, daß, wenn man annimmt, es sei der Ausdruck $\frac{Y^3}{X^3}$ ein Polynom von λ, der Grad dieses Polynoms $3 \cdot (n - m)$ sein muß, also niemals 1 sein kann.

Die Gleichung $z^3 = \lambda$ stellt, wie wir gesagt haben, die Gleichung für die Dreiteilung des Winkels φ dar, wenn man die Variabilität von λ beschränkt, indem man

$$\lambda = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

d. h.

$$|\lambda| = 1$$

setzt; sie stellt andrerseits die Gleichung dar, von der die allgemeine Multiplikation des Würfels mit einer beliebigen reellen Zahl abhängt, wenn man die Variabilität von λ auf die reellen Werte beschränkt.

Nun kann man daraus, daß die Gleichung $z^3 = \lambda$ algebraisch irreduzibel ist, herleiten, daß sie auch in den beiden Fällen

$$\lambda = \cos\varphi + i \sin\varphi \;\; (|\lambda| = 1) \;\; \text{und} \;\; \lambda \;\; \text{reell}$$

im allgemeinen irreduzibel ist; sonst müßte nämlich die Zerlegung von $z^3 - \lambda$ in Faktoren d. h. die Gleichung

$$z^3 - \lambda = \{z - f(\lambda)\} \{z^2 + \mu(\lambda) \cdot z + \nu(\lambda)\}$$

für $\lambda = \cos\varphi + i \sin\varphi$ und reelle Werte von λ möglich sein; und dies kann nicht eintreten, ohne daß diese Gleichung für alle komplexen Werte von λ besteht, da, wenn zwei analytische Funktionen

$$z = \sqrt[3]{\lambda} \quad \text{und} \quad z = f(\lambda)$$

in allen Punkten einer Linie der komplexen Ebene (nämlich auf dem Kreise der Punkte vom absoluten Betrage 1 [dem „Einheitskreise"] und auf der reellen Achse) denselben Wert annehmen, sie in der übrigen Ebene nicht verschiedene Werte annehmen können.

Anmerkung. Die vorstehenden Betrachtungen zeigen, daß sowohl die Gleichung für die Dreiteilung des Winkels wie auch die für die Multiplikation des Würfels (mit einer beliebigen reellen Zahl) im allgemeinen irreduzibel ist, und daraus folgt die Unmöglichkeit, diese Aufgaben mit Hilfe der Geraden und des Kreises zu lösen.

Jedoch kann es besondere Fälle geben, in denen die oben betrachtete Gleichung reduzibel wird; so z. B. bei der Multiplikation des Würfels, wenn λ der Kubus einer ganzen Zahl ist, aber nicht bei anderen ganzzahligen Werten von λ (§ 1).

Auch wenn es sich um die Dreiteilung des Winkels handelt, gibt es besondere Fälle der Reduzibilität und daher besondere Winkel, die mit dem Lineal und dem Zirkel sich in drei gleiche Teile teilen lassen.

Es sei z. B. $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, wo n nicht durch 3 teilbar ist. Wenn n dieser Voraussetzung genügt, so wissen wir, daß sich immer zwei ganze Zahlen x, y in der Weise bestimmen lassen, daß die unbestimmte Gleichung

$$nx - 3y = 1$$

erfüllt wird. Für solche Zahlen x, y erhält man also:

$$\frac{2\pi x}{3} - \frac{2\pi y}{n} = \frac{2\pi}{3n},$$

und daher läßt sich der Winkel $\frac{\varphi}{3}$ als die Differenz zwischen dem x-fachen des Winkels $\frac{2\pi}{3}$ (des gleichseitigen Dreiecks) und dem y-fachen des als gegeben vorausgesetzten Winkels $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ bestimmen.

Also lassen sich alle Winkel $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, und daher auch alle Winkel $m\varphi = \frac{2m\pi}{n}$, wo n nicht durch 3 teilbar ist, mit Hilfe des Lineals und des Zirkels in drei gleiche Teile teilen.

Hinsichtlich dieser auf elementare Weise in drei gleiche Teile teilbaren Winkel $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ sei noch daran erinnert, daß man von diesen Winkeln φ nur diejenigen auf elementare Weise konstruieren kann, für welche n, in Primfaktoren zerlegt, von der Form:

$$2^{\nu}(2^{2^{\nu_1}} + 1)(2^{2^{\nu_2}} + 1) \ldots$$

ist, wo $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0, \ldots$ (vgl. Art. V).[1])

§ 11. Dreiteilung des Winkels mit Hilfe der Quadratrix des Hippias. Die historische Forschung führt uns, soweit sie den ersten Untersuchungen über die Dreiteilung des Winkels nachgeht,

1) Über besondere hierher gehörige Untersuchungen vgl. Bosauquet, Treatise on the trisection of the angle of 30° and any other plane angle, London 1877.

nach der Meinung der angesehensten Geschichtschreiber der Mathematik bis zu Hippias von Elea, dem Philosophen, Sophisten und Mathematiker, der im vierten Jahrhundert vor Christus lebte; ihm wird die Erfindung einer Kurve mit Namen Quadratrix zugeschrieben, deren Anwendung auf unsere Aufgabe wir betrachten wollen.

Wahrscheinlich erhielt diese Kurve von dem Erfinder keinen besonderen Namen; aber von Dinostratus und den anderen, die später glaubten, sie für die Quadratur des Kreises benutzen zu können, wurde sie Quadratrix genannt.[1])

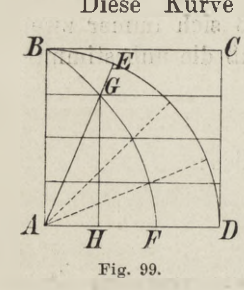


Fig. 99.

Diese Kurve kann auf folgende Weise erzeugt werden. Ist ein Quadrat $ADCB$ gegeben, so beschreibe man (Fig. 99) um A den Viertelkreis BED und stelle sich vor, daß die Gerade AB sich um A nach rechts hin gleichförmig dreht; gleichzeitig soll auch die Gerade BC sich gleichförmig bewegen, indem sie zu AD parallel bleibt und mit ihrem Endpunkte B an BA entlang gleitet. Nimmt man an, daß diese beiden gleichförmigen Bewegungen zu gleicher Zeit beginnen und so vor sich gehen, daß AB gerade einen Viertelkreis beschreibt, während BC über das ganze Quadrat hingleitet, so werden die beiden in Bewegung befindlichen Geraden AB und BC immer einen Punkt gemeinsam haben, und der Ort dieses Punktes ist eben die Kurve, die Quadratrix genannt wird. Ihre Haupteigenschaft ergibt sich sofort aus ihrer Entstehung. Zieht man nämlich irgend eine Gerade durch A, etwa AE, die mit der entsprechenden Parallelen zu AD den Kurvenpunkt G bestimmt, so verhält sich der Viertelkreisbogen BED zu dem Bogen ED, wie sich BA zu GH (der Normalen von G auf AD) verhält. Bezeichnet man also in einem System rechtwinkliger Koordinaten (AD, AB) die Ordinate eines Punktes der Quadratrix mit y und den Winkel, den der zu diesem Punkte gehörige Radius mit der Abszissenachse bildet, mit ϑ, so ist die Kurve durch die Gleichung

$$\frac{y}{b} = \frac{\vartheta}{R}$$

definiert, wenn mit R ein rechter Winkel und mit b die Länge von AB bezeichnet wird.

Also haben wir

$$y = k\vartheta \quad \left(k = \frac{b}{R}\right).$$

1) Vgl. Loria, l. c. I, n. 38; Zeuthen, l. c. pg. 62 f.

Daraus ergibt sich sofort, daß diese Kurve zur Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile oder auch in zwei Teile nach irgend einem gegebenen Verhältnisse benutzt werden kann. Man hat zum Beispiel, wenn, wie in der Figur, der Winkel DAE in drei gleiche Teile geteilt werden soll, nur die Ordinate GH des Schnittpunktes von AE mit der Quadratrix in drei Teile zu teilen und den Punkt A mit denjenigen Punkten der Quadratrix zu verbinden, die durch die durch diese Teilpunkte zur x-Achse gezogenen Parallelen bestimmt werden.

Und die Quadratrix gibt auch die beiden anderen Lösungen der Aufgabe. Setzt man sie nämlich nach oben fort, so erhält man unendlich viele ins Unendliche sich erstreckende Zweige, also auch unendlich viele Schnittpunkte mit dem Schenkel AE. Verfährt man dann mit den zu diesen Schnittpunkten gehörigen Ordinaten wie angegeben, so erhält man zwar unendlich viele Punkte der Quadratrix, mit denen A zu verbinden ist, aber alle diese Punkte liegen nur auf drei Geraden.

Aus gleichen Betrachtungen geht hervor, daß zu denselben Zwecken, wie die Quadratrix, auch die sogenannte Archimedische Spirale ($r = a\varphi$) — der Ort eines Punktes, der auf einer Geraden gleichförmig fortschreitet, während diese Gerade selbst sich um einen ihrer Punkte gleichförmig dreht — benutzt werden kann. Und auch mit Hilfe dieser Kurve erhält man alle drei Lösungen und wiederum nur diese drei Lösungen, obwohl es sich um eine transzendente Kurve handelt.

§ 12. Zurückführung der Dreiteilung des Winkels auf Einschiebungsaufgaben. Dem Berichte des Pappus zufolge wurde schon im Altertum die Aufgabe der Dreiteilung des Winkels auf zwei klassische Einschiebungsaufgaben zurückgeführt. Von diesen könnte nach Zeuthen die eine, die man nicht genauer datieren kann, dem fünften Jahrhundert angehören, während die andere, die in den von den Arabern uns überlieferten Lemmata Archimedis enthalten ist, vielleicht von Archimedes herstammt. Mit Hilfe dieser Einschiebungen erhält man allerdings in beiden Fällen nur eine Lösung der Aufgabe.

1. Es sei der (spitze) Winkel CAB in drei gleiche Teile zu teilen (Fig. 100). Man ziehe von einem Punkte B des Schenkels AB aus die Normale BC und die Parallele BD zu AC und schiebe zwischen BC und BD eine Strecke $EF = 2AB$ ein in der Weise, daß ihre Verlängerung durch den Punkt A geht: auf

diese Weise entsteht der Winkel CAE, der ein Drittel des gegebenen Winkels CAB ist.

In der Tat, wenn G der Mittelpunkt von EF ist und man G mit B verbindet, so ist

$$EG = GF = BG = AB,$$

und daher

$$\sphericalangle GAB = \sphericalangle BGA = 2 \sphericalangle BFG = 2 \sphericalangle CAE,$$

also

$$\sphericalangle CAE = \tfrac{1}{3} \sphericalangle CAB, \text{ w. z. b. w.}$$

2. Es sei CAB der in drei gleiche Teile zu teilende spitze Winkel (Fig. 101). Man beschreibe um A mit irgend einem Radius einen

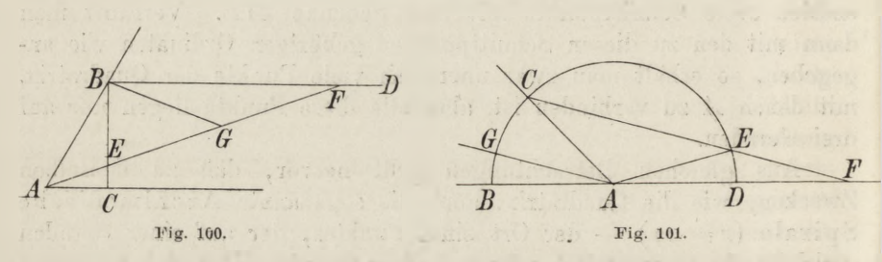


Fig. 100. Fig. 101.

Kreis, der die Schenkel des Winkels und die Verlängerung von BA in den Punkten B, C, D schneiden mag; dann schiebe man zwischen diese Verlängerung und den Kreis eine dem Radius AC gleiche Strecke EF in der Weise ein, daß ihre Verlängerung durch C geht: auf diese Weise entsteht der Winkel EFD, der der dritte Teil des gegebenen Winkels ist.

In der Tat folgt, wenn man A mit E verbindet, aus der Konstruktion sofort, daß

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle CEA = 2 \sphericalangle EFD,$$

und da

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACE + \sphericalangle EFD$$

ist, so folgt

$$\sphericalangle CAB = 3 \sphericalangle EFD,$$

also

$$\sphericalangle EFD = \tfrac{1}{3} \sphericalangle CAB.$$

Zieht man also AG parallel zu FE, so ist der Winkel GAB der dritte Teil des gegebenen Winkels CAB.[1])

1) Diese Methode stammt vielleicht, wie wir oben gesagt haben, von Archimedes her; dies ist wenigstens nach dem Wortlaut des achten Lemmas der

Zur vollständigen Darlegung der beiden obigen Methoden, bei denen ein spitzer Winkel vorausgesetzt ist, ist hinzuzufügen, daß, wenn der gegebene Winkel ein oder mehrere Rechte beträgt, die Dreiteilung auf elementare Weise möglich ist und daß ein stumpfer oder ein überstumpfer Winkel mit elementaren Mitteln in einen oder mehrere Rechte und einen spitzen Winkel zerlegt werden kann, so daß also die Dreiteilung dieser Winkel auf die eines spitzen zurückgeführt ist.

§ 13. Dreiteilung des Winkels mit Hilfe von Kegelschnitten. Die von Pappus erwähnten Methoden. Man suchte nach Montucla[1]) zweifellos lange Zeit hartnäckig mit Hilfe der elementaren Geometrie die Lösung einer der im vorangehenden Paragraphen auseinandergesetzten Einschiebungsaufgaben, auf welche die Aufgabe der Dreiteilung des Winkels zurückgeführt worden war. Diese beiden Einschiebungen hängen, ebenso wie die auf sie zurückgeführte Aufgabe, von im allgemeinen irreduziblen Gleichungen dritten Grades ab und lassen sich daher mit Hilfe des Kreises und der Geraden nicht ausführen. Nach einer großen Zahl fruchtloser oder von Trugschlüssen begleiteter Versuche dachte man daran, sich den Kegelschnitten und verschiedenen anderen Kurven zuzuwenden. Pappus berichtet über die geniale Art, in der einige Geometer, deren Namen nicht genannt werden, die Hyperbel zur Lösung der zweiten der oben auseinandergesetzten Einschiebungsaufgaben benutzt haben.

Wir nehmen daher diese zweite Aufgabe wieder auf und bemerken, um uns auf den Pappusschen Standpunkt zu stellen, zunächst, daß man sie und ihre Lösung auch so aussprechen kann: Ist ein (spitzer) Winkel CAB gegeben, ist ferner von C aus (Fig. 102) die Normale CL auf den Schenkel AB gefällt und das Rechteck $LAGC$ gezeichnet, ist endlich AD über D hinaus verlängert, so schiebe man zwischen die Geraden AD und AG eine Strecke HF

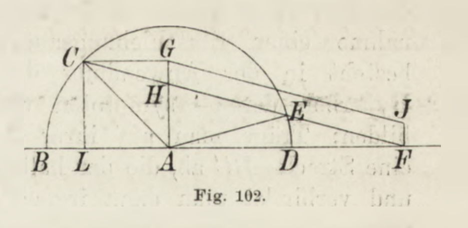


Fig. 102.

sogenannten Lemmata Archimedis anzunehmen; dieser ist nämlich (vgl. Fig. 101): „Wenn man eine Sehne CE eines Kreises um eine dem Radius gleiche Strecke EF verlängert und den Endpunkt F mit dem Mittelpunkte A verbindet, so erhält man zwei Sekanten FEC und FDB, die auf dem gegebenen Kreise zwei nicht aneinander grenzende Bogen CB und DE bestimmen, von denen der eine das Dreifache des anderen ist," und es handelt sich hier also nur um eine geringe formale Abweichung von der oben auseinandergesetzten Methode.

1) l. c. pg. 240 f.

ein, die doppelt so groß als AC ist und deren Verlängerung durch C geht, dann wird der Winkel HFA der dritte Teil des Winkels CAB sein.

Nun bilde man das Parallelogramm $GHFJ$. Dann folgt aus den ähnlichen Dreiecken CLF und HGC:

$$FL : LC = CG : GH,$$

d. h.

$$FL : AG = AL : FJ,$$

also

$$FL \cdot FJ = AL \cdot AG.$$

Und hieraus folgt, daß der Punkt J einer gleichseitigen Hyperbel mit den Asymptoten LF, LC angehört, die auch durch den Punkt G geht. Nun ist HF der Größe nach, nämlich als das Doppelte von AC, gegeben, und daher ist auch GJ gegeben; dies zeigt, daß der Punkt J nicht nur der genannten Hyperbel, sondern auch dem Kreise vom Mittelpunkte G und dem Radius $GJ = 2AC$ angehört, und J ist also ein Schnittpunkt dieses Kreises und jener Hyperbel (nämlich derjenige Schnittpunkt, der rechts von AG und oberhalb der x-Achse liegt). Daher ist J leicht zu konstruieren, und fällt man von diesem Punkte aus die Normale auf AD, so erhält man den Punkt F, der mit C verbunden den Winkel $CFA = \frac{1}{3} CAB$ liefert.

Von Pappus[1]) wird noch eine andere Lösung der Aufgabe der Dreiteilung des Winkels mittels einer Hyperbel mitgeteilt, aber die Hyperbel wird hier in anderer Weise benutzt, ohne Zuhilfenahme einer Einschiebungsaufgabe. Diese sehr elegante Lösung besteht in der Anwendung der folgenden Eigenschaft derjenigen Hyperbel, deren Asymptoten einen Winkel von 120^0 miteinander bilden: Trägt man auf ihrer Achse von einem Scheitel (B) aus eine Strecke BC ab, die der halben reellen Achse gleich ist (Fig. 103), und verbindet man dann irgend einen Punkt D der Hyperbel mit dem so erhaltenen Punkte C und mit dem anderen Scheitel A, so ist der Winkel DCA immer doppelt so groß als der Winkel CAD.[2])

1) Collect. math. l. 4, prop. 34.

2) Diese Eigenschaft der genannten Hyperbel ist wenig bekannt; wir beweisen sie daher. Daraus, daß die Asymptoten einen Winkel von 120^0 miteinander bilden, folgt, wenn man die halben Achsen, wie üblich, mit a und b bezeichnet, $b = a \operatorname{tg} 60^0 = a\sqrt{3}$, und daher ist die auf die Achsen bezogene Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y^2 = 3x^2 - 3a^2.$$

Daraus folgt, daß, wenn man einen Kreisbogen durch die Punkte A, C und D legt, der Bogen AD doppelt so groß ist als der Bogen DC. Dann versteht man leicht, wie man diese Eigenschaft zur Dreiteilung eines Winkels benutzen kann: Man hat nur über AC den Kreisbogen zu schlagen, der zu dem gegebenen, als Zentriwinkel CAE aufgefaßten Winkel α gehört; dann ist CED der dritte Teil des Winkels $CEA = \alpha$.

Anmerkung. Die genannte Hyperbel schneidet den Kreis ADC noch in dem Punkte S, und es ist daher der Bogen CS der dritte Teil des Bogens CSA $\left(= \frac{2\pi - \alpha}{3}\right)$ und, wenn man den Durchmesser SEU gezogen denkt, der Bogen $CDU = \pi - \frac{2\pi - \alpha}{3}$ $= \frac{\pi + \alpha}{3}$; außerdem schneidet die Hyperbel den Kreis noch in dem Punkte T, und es ist daher einerseits der Bogen CDT der dritte Teil der Summe aus dem Bogen CDA und der ganzen Peripherie $\left(= \frac{2\pi + \alpha}{3}\right)$ und

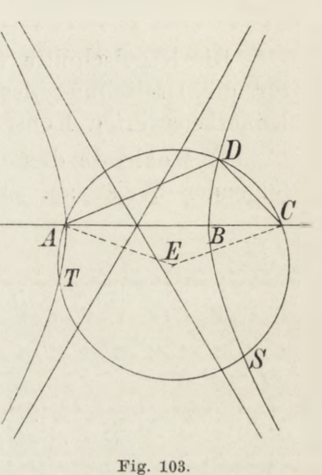


Fig. 103.

Errichtet man nun (Fig. 104) in der Mitte F von AC auf AC eine Normale, die AD in G scheiden mag, so ist, um zu beweisen, daß der Winkel DCA doppelt so groß ist als der Winkel CAD, nur zu zeigen, daß CG die Halbierungslinie des Winkels DCA, d. h. daß $AG : GD = AC : CD$ ist. Fällt man von D aus die Normale DP auf AC, so ist $AG : GD = AF : FP$. Also ist nur zu beweisen, daß $AC : CD = AF : FP$ ist. Nun ist $AC = 3a$, $CD = \sqrt{DP^2 + PC^2}$ $= \sqrt{y^2 + (2a - x)^2}$, $AF = \frac{3}{2}a$, $FP = x - \frac{a}{2}$, daher kann man jene Proportion schreiben:

$$3a : \sqrt{y^2 + (2a - x)^2} = \frac{3}{2}a : \left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Nun ist für diese besondere Hyperbel:

$$y^2 = 3x^2 - 3a^2.$$

Setzt man diesen Ausdruck für y^2 in die letzte Proportion ein, so ergibt sich

$$3a : \sqrt{4x^2 + a^2 - 4ax} = 3a : (2x - a)$$
$$= \frac{3}{2}a : \frac{2x - a}{2}.$$

Also sind die zu beweisenden Proportionen richtig; CG ist die Halbierungslinie des Winkels DCA und DCA ist doppelt so groß als DAC.

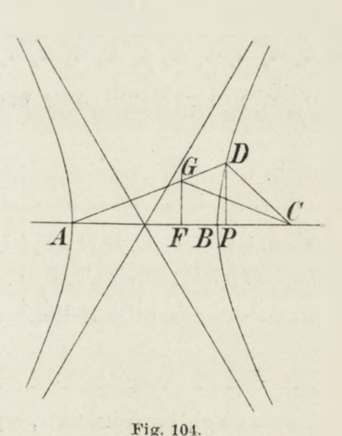


Fig. 104.

andrerseits der Bogen CST der dritte Teil der Summe aus dem Bogen CSA und der ganzen Peripherie $\left(=\frac{4\pi-\alpha}{3}\right)$, woraus sich wieder ergibt Bogen $CDT = 2\pi - \frac{4\pi-\alpha}{3} = \frac{2\pi+\alpha}{3}$. Also erhält man auf diese Weise alle drei Lösungen der Aufgabe der Dreiteilung des Winkels.

Die Kegelschnitte wurden auch von den modernen Geometern für die Dreiteilung des Winkels benutzt und führten zu folgenden bemerkenswerten Konstruktionen.

1) Methode des Descartes.[1]) Descartes faßte die Aufgabe in folgender Weise an. Es sei auf einem Kreise vom Radius 1 der Bogen $ABCD$ (Fig. 105), dessen Sehne $AD = q$ gesetzt werden mag, in drei Teile zu teilen. Es seien B und C die gesuchten Teilpunkte, z sei die zu dem Bogen AB gehörige Sehne, und die Punkte A, B, C, D seien mit dem Mittelpunkte O des Kreises durch gerade Linien verbunden. Endlich sei durch B die Parallele BF zu CO gezogen. Dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AOB und BAE:

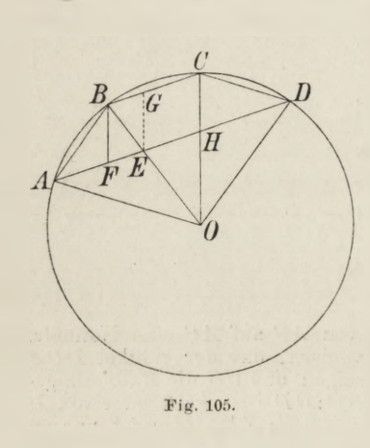


Fig. 105.

$$AO : AB = AB : BE$$

oder

$$1 : z = z : BE \tag{1}$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BAE und EBF:

$$AB : BE = BE : FE \tag{2}$$

oder, unter Benutzung von (1):

$$z : z^2 = z^2 : FE,$$

d. h.

$$FE = z^3.$$

Nun ist $AE = HD = AB$ und $EH = BC - BG$ (wenn EG parallel zu HC ist), also $EH = AB - FE$, daher $AD = 3AB - FE$, d. h. $q = 3z - z^3$, also genügt z der Gleichung:

$$z^3 = 3z - q. \tag{3}$$

1) Vgl. La Géometrie, Op. cit. pg. 75 f.

Man ziehe also, sagt Descartes, eine Parabel (Fig. 106) von einem Parameter gleich dem halben Radius des Kreises, dem der in drei Teile zu teilende Bogen angehört, also nach unserer Annahme von einem Parameter gleich $\frac{1}{2}$, nehme auf ihrer Achse, vom Scheitel A an gerechnet, den Punkt B mit der Abszisse 2 an und errichte in B auf der Achse eine Normale BC gleich $\frac{q}{2}$, d. h. gleich der halben zu dem gegebenen Bogen gehörigen Sehne. Nun beschreibe

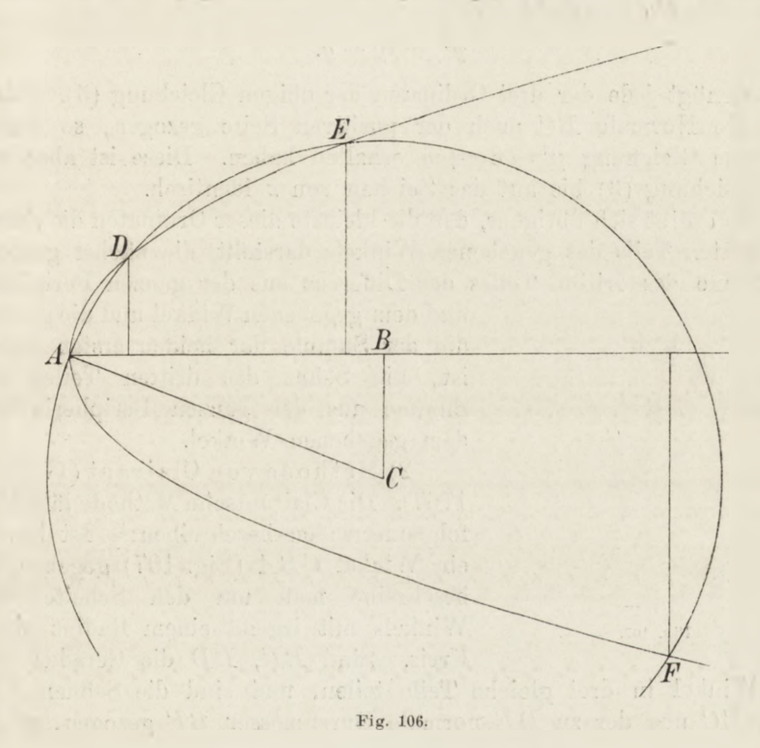


Fig. 106.

man von C aus mit dem Radius CA einen Kreis. Dieser wird die Parabel außer in dem Scheitel A noch in drei Punkten D, E, F schneiden: die Ordinaten dieser Punkte sind die Längen der gesuchten Sehne. In der Tat, nimmt man z. B. an, BC sei nach der negativen Seite gezogen, so hat man für die Schnittpunkte die Gleichungen

$$y^2 = x$$

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{q^2}{4},$$

und aus diesen folgt:

$$(y^2 - 2)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{q^2}{4}$$

$$y^4 - 3y^2 + qy = 0$$

$$y(y^3 - 3y + q) = 0.$$

Sehen wir von der trivialen Lösung $y = 0$, die dem Schnittpunkte A entspricht, ab, so ergibt sich

$$y^3 = 3y - q.$$

Also genügt jede der drei Ordinaten der obigen Gleichung (3). Hätte man die Normale BC nach der positiven Seite gezogen, so würde man die Gleichung $y^3 = 3y + q$ erhalten haben. Diese ist aber mit der Gleichung (3) bis auf das Zeichen von z identisch.

Es ergibt sich übrigens, daß die kleinste dieser Ordinaten die Sehne des dritten Teils des gegebenen Winkels darstellt, die nächst größere die Sehne des dritten Teiles der Differenz aus der ganzen Peripherie und dem gegebenen Winkel und die größte, die der Summe der beiden ersten gleich ist, die Sehne des dritten Teiles der Summe aus der ganzen Peripherie und dem gegebenen Winkel.

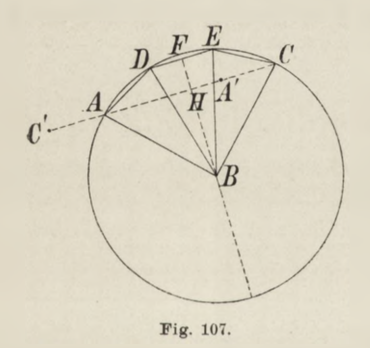


Fig. 107.

2) Methode von Clairaut (1713 bis 1767). Die Clairautsche Methode läßt sich folgendermaßen beschreiben:[1]) Ist irgend ein Winkel CBA (Fig. 107) gegeben, so beschreibe man um den Scheitel des Winkels mit irgend einem Radius einen Kreis. Sind BE, BD die Geraden, die den Winkel in drei gleiche Teile teilen, und sind die Sehnen AD, DE, EC und der zu DE normale Durchmesser BF gezogen, so ist

$$CE = ED = 2 \cdot EF,$$

und daher gehört der Punkt E (von dessen Bestimmung offenbar die Dreiteilung des Winkels abhängt) einer Hyperbel an, für die der Punkt C ein Brennpunkt und der Durchmesser BF eine Leitlinie ist und deren Exzentrizität 2 ist. Nun ist der Punkt A von dem Punkte C doppelt so weit als von dem Durchmesser BF entfernt und andererseits liegt er auf der von C auf BF gefällten Normalen, also

1) Vgl. Taylor, Geometry of the conics. Cambridge 1881, n. 308, pg. 126.

ist er ein Scheitel der Hyperbel, und der andere Scheitel A' liegt auf der Geraden AC auf derselben Seite von BF wie der Punkt C, und zwar in einer Entfernung von C, die gleich $\frac{2}{3}$ von CH ist (wenn H den Schnittpunkt von AC und BF bezeichnet). Daher ist die reelle Achse der genannten Hyperbel festgelegt, und ihr zweiter Brennpunkt C' befindet sich auf der Verlängerung der Strecke $A'A$ in einer Entfernung von A gleich $A'C$. Also ist die Hyperbel vollständig bestimmt, und man erhält durch sie auf dem ursprünglich beschriebenen Kreise den Punkt E, der zur Dreiteilung des gegebenen Winkels CBA führt.

Aber diese Konstruktion ist nichts anderes, als die oben (pg. 236) angeführte von Pappus mitgeteilte Konstruktion. Man erkennt dies sofort, da $A'C = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{2} AA'$ ist, und es ergibt sich auch aus der Exzentrizität 2:

$$4 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

also

$$\frac{b}{a} = \sqrt{3},$$

d. h. die Asymptoten bilden einen Winkel von 120° miteinander.

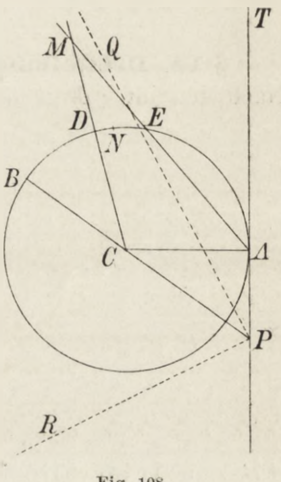


Fig. 108.

3) Methode von Chasles[1]) (1793 bis 1880). Ist ACB der Winkel und also AB der Bogen, der in drei gleiche Teile zu teilen ist (Fig. 108), so trage man von B aus irgend einen Bogen BD und von A aus einen Bogen $AE = 2\,BD$ ab. Zieht man dann die Tangente AT, so sieht man, daß der Winkel TAE gleich dem Winkel DCB ist. Läßt man daher die Bogen BD und AE variieren, wobei der zweite immer doppelt so groß als der erste ist, so erhält man zwei projektive Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten C und A, denn die von homologen Strahlenpaaren gebildeten Winkel sind einander gleich. Daher wird der geometrische Ort des Schnittpunktes M zweier homologer Strahlen CD, AE ein Kegelschnitt sein, und der Schnittpunkt N dieses Kegelschnittes mit dem Bogen AB wird die Lösung der Dreiteilung des Bogens AB (und daher des Winkels ACB) ergeben, denn es ist $AN = 2\,BN$, also $ACB = 3\,NCB$.

---

1) Vgl. Aperçu historique.

Aber dieser Kegelschnitt schneidet den Kreis AEB noch in zwei anderen Punkten, und diese ergeben die beiden anderen Lösungen der Aufgabe.

Man kann übrigens erkennen, daß der genannte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist; denn, wenn man durch die Punkte A und C zu den Halbierungslinien PQ, PR der Winkel, die die Geraden AT, BC miteinander bilden, Parallele zieht, so erhält man zwei Paare paralleler homologer Strahlen der erzeugenden Büschel des Kegelschnitts, und dieser wird daher zwei Punkte im Unendlichen haben und also eine Hyperbel sein, und zwar wird diese Hyperbel gleichseitig sein, da ihre Asymptoten zu den Halbierungslinien zweier Supplementwinkel parallel sind, also aufeinander normal stehen.

§ 14. Dreiteilung des Winkels mit Hilfe der Konchoide. Nach den im § 4 gemachten Bemerkungen können die Einschiebungsaufgaben, auf welche die Dreiteilung des Winkels im § 12 zurückgeführt wurde, direkt mit der Nikomedischen Konchoide gelöst werden. So ist für die erste Aufgabe nur mit dem bekannten Instrumente (§ 4) die Konchoide zu beschreiben, die (Fig. 109) den Punkt B zum Pole, die Gerade AC zur Basis und eine Strecke von doppelter Größe als AB zum Intervalle hat. Wenn F der Punkt ist, in dem diese Konchoide die Gerade AD schneidet, so wird, wenn man B mit F verbindet, die Strecke JF gleich dem Intervalle der Konchoide, also gleich $2AB$ sein und dann wird, wie wir bereits bewiesen haben (§ 12), $\sphericalangle CBF = \frac{1}{3} \sphericalangle CBA$ sein.

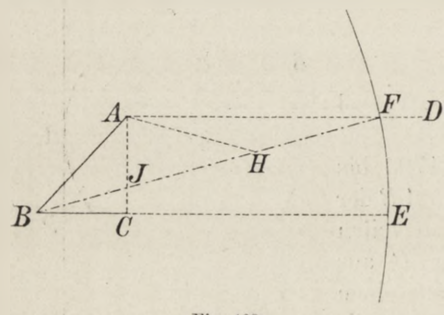


Fig. 109.

Ebenso kann man mit der Konchoide auch die zweite der erwähnten Einschiebungsaufgaben leicht lösen. Nimmt man den Punkt C (Fig. 110) zum Pol, den Radius BC zum Intervalle und die Gerade AB zur Basis einer Konchoide, so kann man denjenigen Zweig dieser Konchoide beschreiben, der sich auf derselben Seite der Basis AB wie der Pol C befindet (die sogenannte zweite Konchoide der Alten, die in diesem Falle einen Doppelpunkt und eine Schleife haben muß, da ihr Intervall größer ist als die Entfernung ihres Poles von ihrer Basis). Ist E der Punkt, in dem diese Kurve den Halbkreis $ACMD$

außerhalb des gegebenen Winkels CBA trifft, so ziehe man CE und verlängere diese Gerade, bis sie in F die Verlängerung des Durchmessers AD schneidet; dadurch ist zwischen den Halbkreis und die Gerade AB die Strecke $EF = BC$ eingeschoben und der Winkel EFD ist, wie wir bereits bewiesen haben (§ 12), der dritte Teil des Winkels CBA.

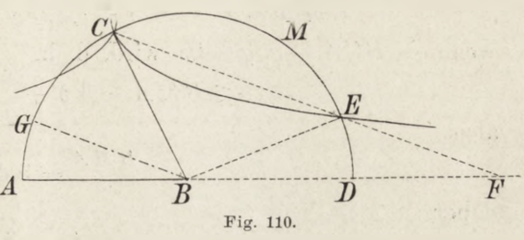


Fig. 110.

Die Benutzung der Konchoide zur Dreiteilung des Winkels wird von Proklus dem Nikomedes selbst zugeschrieben, während Pappus, nach Cantor mit Unrecht, sich ihrer als eigener Leistung zu rühmen scheint.[1])

Methode von Newton. Wollen wir noch bei dieser Gattung von Lösungen verweilen, so ist die von Newton[2]) angegebene sehr einfache Lösung mit Hilfe einer besonderen Einschiebung, die sich mit der Konchoide unmittelbar ausführen läßt, besonderer Erwähnung wert.

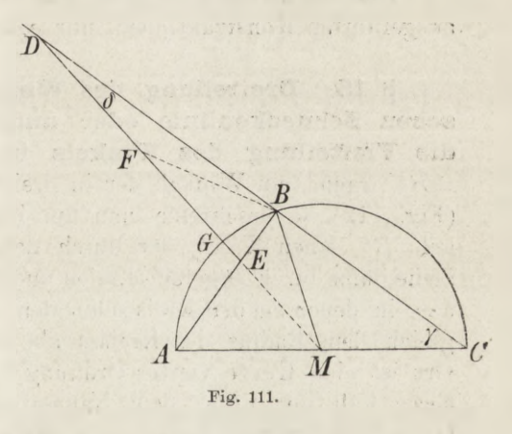


Fig. 111.

Es sei AB (Fig. 111) der in drei gleiche Teile zu teilende Bogen und es sei seine Sehne und der Durchmesser AC gezogen, so ziehe man die Gerade BC und schiebe zwischen die Geraden AB und BC eine Strecke DE ein, die dem Durchmesser AC gleich ist und deren Verlängerung durch den Mittelpunkt M des Kreises ABC geht. Ist dann G der Schnittpunkt von DE mit dem Halbkreise, so wird behauptet, daß GB der dritte Teil des gegebenen Bogens, d. h. $\sphericalangle BMG = \frac{1}{3} \sphericalangle BMA$ ist.

In der Tat, halbiert man DE in F und verbindet man F mit B, so ist BF gleich der Hälfte von DE, also gleich dem Radius

1) Vgl. Loria, op. cit. II, pg. 202; Cantor, Vorlesungen über Gesch. d. Math. I, pg. 305.
2) Op. cit.

BM, daher ist $\sphericalangle BMG = \sphericalangle GFB = 2 \sphericalangle FDB = 2\,\delta$. Daraus folgt

$$\sphericalangle BMA = \sphericalangle GMA + \sphericalangle BMG = (\gamma + \delta) + 2\,\delta,$$

wenn $\sphericalangle BCA = \gamma$ gesetzt wird, d. h.

$$\sphericalangle BMA = 3\,\delta + \frac{\sphericalangle BMA}{2},$$

also

$$\frac{\sphericalangle BMA}{2} = 3\,\delta,$$

daher

$$\sphericalangle BMA = 3 \cdot (2\,\delta) = 3 \cdot \sphericalangle BMG, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Beschreibt man also die Konchoide, die M zum Pole, AB zur Basis und den Durchmesser des Kreises ABC zum Intervalle hat, und verbindet darauf den Punkt D, in dem diese Konchoide und die Gerade BC sich schneiden, mit dem Mittelpunkte M des Kreises, so wird von dem gegebenen Bogen oder Winkel der dritte Teil abgeschnitten.

Diese Konstruktion ergibt, wie alle mit Hilfe von Einschiebungen ausgeführten Konstruktionen, nur eine Lösung.

§ 15. Dreiteilung des Winkels mit Hilfe der Pascalschen Schneckenlinie oder anderer Kurven, die auch für die Vielteilung des Winkels in Betracht kommen.[1] Ist ABC irgend ein Winkel, der in drei gleiche Teile geteilt werden soll (Fig. 112), so beschreibe man um irgend einen Punkt O des Schenkels BC einen Kreis, der durch den Scheitel B des Winkels geht, ziehe dann durch B gerade Linien und trage auf diesen von den Punkten aus, in denen sie den Kreis schneiden, nach beiden Seiten hin ein Stück gleich dem Radius des Kreises ab. Der so erhaltene geometrische Ort ist eine Kurve vierter Ordnung, und zwar bildet er einen besonderen Fall der unter dem Namen der Pascalschen Schneckenlinie[2] bekannten Kurve, die als eine Konchoide mit kreis-

[1] Bei der Redaktion dieses Paragraphen haben wir uns besonders an das Werk von G. Loria angelehnt: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte, Deutsche Ausgabe von Fr. Schütte, Leipzig 1902, in dem an verschiedenen Stellen und besonders in einem eigenen Kapitel (Kap. 12, pg. 323 ff.) ausführlich von den bemerkenswerteren Kurven, mit deren Hilfe man das Problem der Vielteilung irgend eines Winkels lösen kann, gesprochen wird. Wir ergreifen diese Gelegenheit, um dem Verfasser für seine liebenswürdigen Mitteilungen und die uns gütigst zur Verfügung gestellten Publikationen unsern lebhaftesten Dank zu sagen.

[2] Es handelt sich hier, nach Cantor, Tannery und Loria, zweifellos um Étienne Pascal, den Vater des Blaise, und nach Roberval (in den Observations) kommt dem Blaise Pascal selbst die Bemerkung zu, daß die Schnecken-

förmiger Basis (vgl. § 4) betrachtet werden kann. Zieht man nun durch den Mittelpunkt O des Kreises die Parallele zu AB und verbindet den Scheitel B mit den drei Punkten D, E, F, in denen diese Parallele, abgesehen von O die Schneckenlinie schneidet, so erhält man die drei Lösungen der Aufgabe.

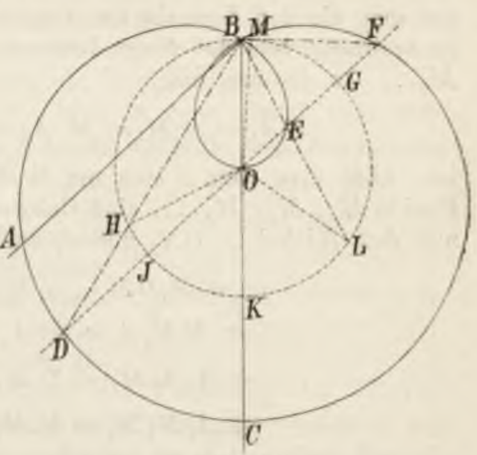


Fig. 112.

Denn, wenn wir zuerst die Linie BD betrachten, so ist

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABC &= \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC\\ &= \sphericalangle ABD + \sphericalangle OHB\\ &= \sphericalangle ABD + 2\sphericalangle ODB\\ &= 3\sphericalangle ABD.\end{aligned}$$

Wenn wir zweitens die Linie BE betrachten, so ist

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABL &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBL = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BLO\\ &= \sphericalangle ABC + \pi - 2\sphericalangle OEL = \sphericalangle ABC + \pi - 2\sphericalangle ABL,\end{aligned}$$

also

$$3\sphericalangle ABL = \pi + \sphericalangle ABC, \quad \sphericalangle ABL = \frac{\pi + \sphericalangle ABC}{3}.$$

Und wenn wir endlich die Linie BF betrachten, so ist

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABF &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBF = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BMO\\ &= \sphericalangle ABC + 2(\pi - \sphericalangle ABF),\end{aligned}$$

also

$$3\sphericalangle ABF = 2\pi + \sphericalangle ABC, \quad \sphericalangle ABF = \frac{2\pi + \sphericalangle ABC}{3}.$$

Die anomale Zykloide von Ceva. Thomas Ceva gibt in seinen Opuscula mathematica (Mediolani 1699) unter dem Titel Cycloidum anomalarum descriptio die Konstruktion einer Kurve, die er anomale Zykloide nennt und in ihrer Verwendbarkeit zur Vielteilung eines Winkels erläutert. Sie wird in folgender Weise

linie eine zur Dreiteilung des Winkels geeignete Kurve ist, und diese Bemerkung wurde dann von vielen anderen, auch in anderer Form, wiederholt (vgl. Azémar, Trisection de l'angle, suivie de recherches analytiques sur le même sujet de Garnier, Paris 1809; Fusinieri, Trisezione geometrica degli archi di cerchio ecc.; Mem. della Società Ital. delle Scienze 23 (1846); Jouanne, Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal, Nouv. ann. (9) 2 (1870); Brocard, Note sur un compas trisecteur, Bull. Soc. France 3 (1875)).

erzeugt. Ist ein Kreis vom Mittelpunkte O und Radius a gegeben und sind durch den Mittelpunkt eine Gerade OX und eine Gerade r gezogen, die den Kreis in den Punkten A und M schneiden mögen, so bestimme man auf diesen beiden Geraden Punkte A_1, A_2, ..., M_1, M_2, ... in der Art, daß

$$MA_1 = A_1M_1 = M_1A_2 = A_2M_2 = \ldots . = a$$

ist. Läßt man dann r sich um O drehen, so beschreibt jeder der Punkte M_1, M_2, M_3, ... eine Cevasche Zykloide. Bezeichnet man nun den Winkel (r, OX) mit ω, so hat man offenbar:

$$\sphericalangle A_1OM = \sphericalangle MA_1O = \omega,$$
$$\sphericalangle MM_1A_1 = \sphericalangle A_1MM_1 = 2\omega,$$
$$\sphericalangle A_2A_1M_1 = \sphericalangle M_1A_2A_1 = 3\omega,$$
$$\sphericalangle A_2M_1M_2 = \sphericalangle M_1M_2A_2 = 4\omega, \ldots,$$

und daraus geht hervor, daß, wenn einmal die genannten Cevaschen Kurven konstruiert sind, sie zur Lösung des Problems der Vielteilung irgend eines Winkels dienen können.

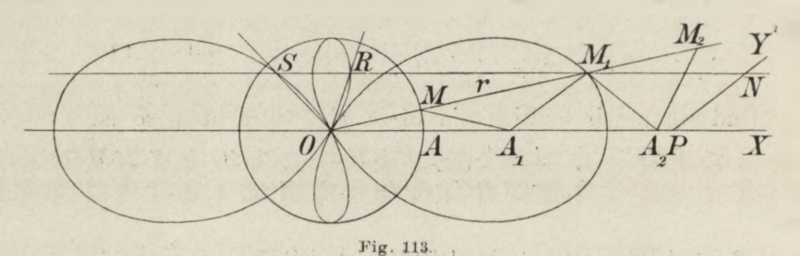


Fig. 113.

Im besonderen kann man sich zur Dreiteilung des Winkels der ersten Cevaschen Kurve in folgender Weise bedienen (Fig. 113). Ist ein Winkel $XPY = \alpha$ gegeben, von dem ein Schenkel in der Geraden OX liegt, so trage man auf PY ein Stück $PN = a$ ab und ziehe durch N eine Parallele zu OX; verbindet man dann den am meisten nach rechts gelegenen der Punkte, in denen diese Parallele die erste Cevasche Kurve schneidet, mit O, so erhält man eine Gerade, die mit OX den Winkel $\frac{\alpha}{3}$ bildet.

Aber auch diese Kurve gibt alle drei Lösungen der Aufgabe. Denn verbindet man noch die Schnittpunkte R und S jener Parallelen mit der Kurve mit O, so erkennt man leicht, daß

$$\sphericalangle XOR = \frac{\pi + \alpha}{3} \text{ und } \sphericalangle XOS = \frac{2\pi + \alpha}{3} \text{ ist.}$$

Auf den im Vorstehenden auseinandergesetzten Beziehungen beruht ein Dreiteilungszirkel, der dem Ceva selbst zugeschrieben wird, und ein ähnliches Instrument von Tschirnhausen.

Die Kurven von Schoute. Sind in einer Ebene zwei feste Punkte A und A' gegeben (Fig. 114), so betrachte man den Ort der in dieser Ebene liegenden Punkte P von der Beschaffenheit, daß der Winkel $A'AP$ zu dem Winkel $BA'P$ (und also auch zu dem Winkel $PA'A$) in einem bestimmten Verhältnisse steht. Für verschiedene Werte dieses Verhältnisses erhält man als Ort des Punktes P verschiedene Kurven, die zur Lösung der allgemeinen Aufgabe der Vielteilung des Winkels dienen können. Wir gehen hierauf nicht näher ein, sondern verweisen den Leser auf das angeführte Kapitel des Loriaschen Buches: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven und wollen nur bemerken, daß die im § 13 angegebene Lösung der Dreiteilung des Winkels mit Hilfe der Hyperbel, deren Asymptoten um 120^0 gegeneinander geneigt sind, nur ein besonderer Fall dieser Schouteschen Lösung der allgemeinen Aufgabe der Vielteilung ist.

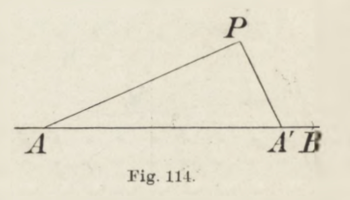


Fig. 114.

In dem genannten Loriaschen Buche wird noch ausführlich von anderen zur Teilung des Winkels geeigneten Kurven von ziemlich komplizierter Art gesprochen, bei denen wir uns aber mit Rücksicht auf unser engeres Thema nicht aufhalten wollen. Immerhin wollen wir nicht unterlassen, einiges zu sagen über die

Kurven von Kempe. Wir schicken folgende Bemerkungen voraus. Jede ganze Zahl ist entweder eine Primzahl oder ein Produkt von Primfaktoren, und daher kann die Teilung eines Winkels in eine beliebige Zahl von gleichen Teilen auf die Teilung in eine Zahl von gleichen Teilen, die eine Primzahl ist, zurückgeführt werden. Wenn nun p eine (ungerade) Primzahl ist, so ist nach dem Fermatschen Satz $2^{p-1} - 1$ durch p teilbar, und dasselbe wird daher mit dem Produkt $\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$ der Fall sein; also wird wenigstens einer der Faktoren dieses Produkts ein Vielfaches von p sein. Man braucht daher, wenn man einen Winkel in p gleiche Teile teilen will, sich nur mit der Teilung eines Winkels in $2^n \pm 1$ gleiche Teile, wo n eine ganze Zahl bedeutet, zu beschäftigen, denn der ursprünglich gesuchte Teil wird dann ein Vielfaches des so gefundenen Teiles sein.

Nun beschreibe man um einen Punkt M mit einem Radius a einen Kreis (Fig. 115), der die x-Achse in O berührt, ziehe durch O

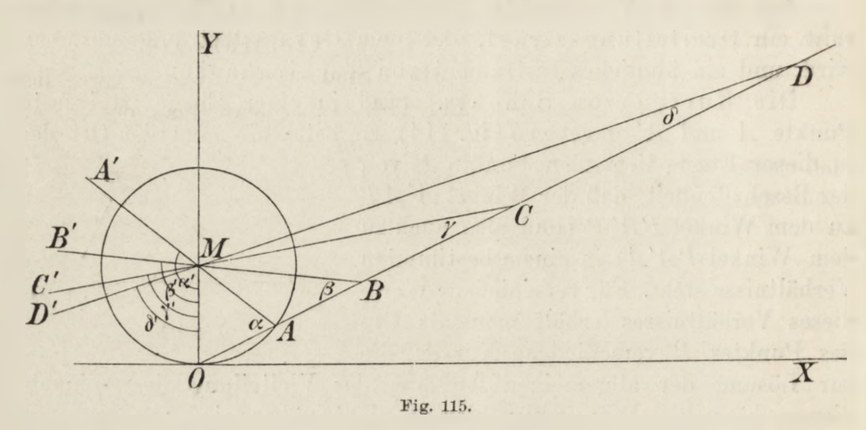


Fig. 115.

eine beliebige Sekante OA und trage auf ihr die Strecken $AB = AM$, $BC = BM$, $CD = CM$, ... ab. Verlängert man dann die Strecken $AM, BM, CM, DM, \ldots$ über M hinaus und bezeichnet die Winkel, die AM, BM, CM, $DM, \ldots$ mit OA bilden, mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ und die Winkel, die MA', MB', MC', $MD', \ldots$ mit MO bilden, mit $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$, so ist $\alpha' = 2\alpha$, $\beta' = 3\beta$, $\gamma' = 5\gamma$, $\delta' = 9\delta, \ldots$. Läßt man nun die Sekante sich um O drehen, so werden die

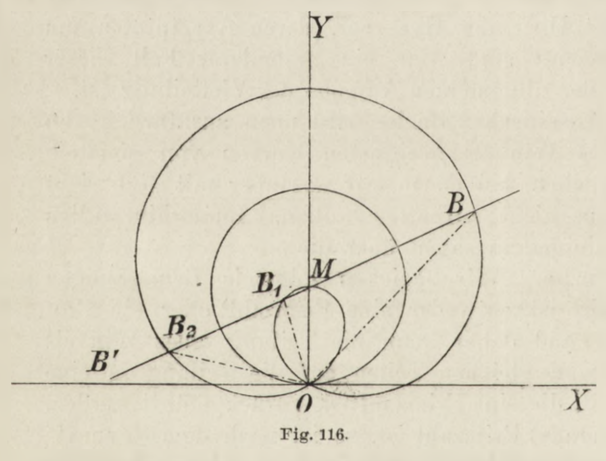


Fig. 116.

Punkte B, C, D, ... gewisse Kurven beschreiben, und wenn man daher durch M irgend eine Gerade zieht, die mit MO einen Winkel ω bildet, so wird diese den Kreis und die genannten Kurven in Punkten F, G, H, K, ... schneiden, so daß die Winkel MFO, MGO, MHO, MKO, ... der Reihe nach gleich $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{5}, \frac{\omega}{9}, \ldots$ sein werden. Und daher sind diese Kurven zur Teilung eines Winkels in $2^n + 1$ gleiche Teile zu verwenden.

Für den besonderen Fall der Dreiteilung des Winkels ist die in Betracht kommende Kurve nichts anderes als die schon (pg. 244) betrachtete spezielle Pascalsche Schneckenlinie, und man erhält daher mit Hilfe dieser Kurve alle drei Lösungen der Aufgabe. In der Tat ist, wenn (Fig. 116) $\sphericalangle B'MO = \alpha$ gesetzt wird,

$$\sphericalangle B'BO = \frac{\alpha}{3}, \sphericalangle B'B_1O = \frac{\pi + \alpha}{3}, \sphericalangle B'B_2O = \frac{2\pi + \alpha}{3}.$$

Für den zweiten allgemeinen Fall, der Teilung eines Winkels in $2^n - 1$ gleiche Teile, beschreibe man um den Anfangspunkt O mit einem Radius a einen Kreis (Fig. 117), der die x-Achse in M schneiden mag. Zieht man dann durch O einen beliebigen Radius OA und trägt man auf ihm Strecken ab in der Weise, daß $AB = AM$, $BC = BM$, $CD = CM, \ldots$, so ist offenbar $\sphericalangle OAM = \sphericalangle AMO$, $\sphericalangle OBM = \frac{1}{3}\sphericalangle BMO$, $\sphericalangle OCM = \frac{1}{7}\sphericalangle CMO$, $\sphericalangle ODM = \frac{1}{15}\sphericalangle DMO, \ldots$

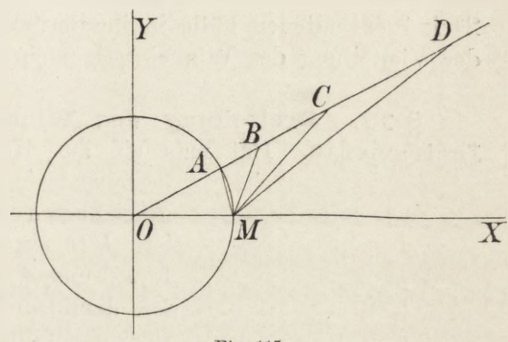


Fig. 117.

Nun beschreiben die Punkte $B, C, D, \ldots$ wiederum, wenn OA sich um O dreht, gewisse Kurven, und wenn man daher durch M eine Gerade zieht, die mit MO einen Winkel ω bildet, so wird diese die genannten Kurven in Punkten $F, G, H, \ldots$ schneiden, so daß $\sphericalangle OFM = \frac{1}{3}\omega$, $\sphericalangle OGM = \frac{1}{7}\omega$, $\sphericalangle OHM = \frac{1}{15}\omega, \ldots$ sein wird, und daher werden diese Kurven zur Teilung eines Winkels in $2^n - 1$ gleiche Teile dienen können.

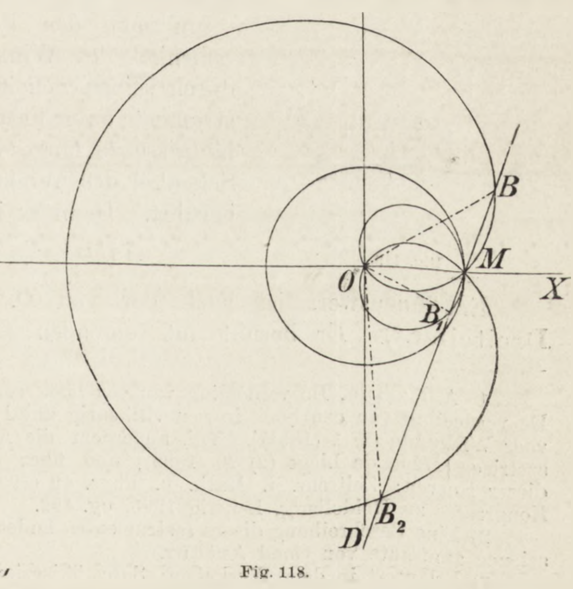


Fig. 118.

Im besonderen ergibt sich wieder für den Fall der Dreiteilung des Winkels, daß man auf diese Weise alle drei Lösungen der Aufgabe erhält. Denn es ist in Fig. 118, wie man leicht erkennt, wenn $\sphericalangle BMO = \alpha$ gesetzt wird, $\sphericalangle OBM = \frac{\alpha}{3}$, $\sphericalangle OB_1D = \frac{\pi + \alpha}{3}$, $\sphericalangle OB_2D = \frac{2\pi + \alpha}{3}$.

Durch diese Kempesche Methode ist, da alle in der Formel $2^n \pm 1$ enthaltenen Fälle in ihr Berücksichtigung finden, das Problem der Vielteilung des Winkels allgemein erledigt.[1])

§ 16. Dreiteilung des Winkels mit Hilfe besonderer Instrumente. Hat man ein aus Holz, Messing oder dergleichen bestehendes Instrument von der in Fig. 119 gezeichneten Art, wo DFE ein Halbkreis ist, BD ein den Kreis in D berührendes Lineal und AE ein Lineal, dessen obere Kante mit dem Durchmesser DE des Halbkreises zusammenfällt, wobei das Stück AD gleich dem Radius dieses Halbkreises ist, so kann man mit diesem Instrumente einen nicht zu kleinen Winkel in drei gleiche Teile teilen, wenn man den Punkt A auf den einen Schenkel des Winkels und die Kante BD durch seinen Scheitel legt und nun das Instrument unter Festhaltung dieser Lagenverhältnisse so lange verschiebt, bis der andere Schenkel des Winkels den Halbkreis DFE berührt. Denn es ist dann offenbar

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBO = \sphericalangle OBF.^{2)}$$

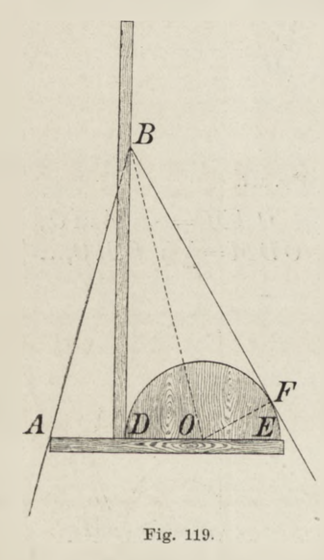


Fig. 119.

Erwähnenswert ist auch der von Q. Amadori konstruierte Dreiteiler.[3]) Er beruht auf folgenden Erwägungen. Ist irgend

---

1) A. Kempe, De verdeeling van een hock een $2^n + 1$ gelyke deelen, und De verdeeling van een hock in een villkenrig antal gelyke deelen [Niew Archiv voor Wiskunde (2) 1 (1894)]. Vgl. außerdem die Abhandlung: Sur les courbes sectrices [Mém. de Liège (2) 20 (1898)] und über die mechanische Erzeugung dieser Kurven: Zeitschr. f. Math. u. Phys. 49 (1903) und Verhandl. d. Math.-Kongresses zu Heidelberg, Leipzig 1905, pg. 492.

2) Eine Beschreibung dieses Instrumentes findet sich in dem Werkchen: La science amusante von Good Arthur.

3) Erläutert in dem Werkchen: Sulla Trisezione d'un angolo qualunque, Savona 1883.

ein Winkel ROS (Fig. 120) gegeben, so möge er durch die Gerade LZ halbiert sein; ferner möge um seinen Scheitel mit einem beliebigen Radius ein Kreis $RZSV$ beschrieben und der Durchmesser CD normal zu LZ gezogen sein. Auf einem (genügend langen) Lineal tragen wir dann eine Strecke PQ gleich dem Durchmesser des genannten Kreises ab, und nun legen wir dieses Lineal so auf die Ebene des gegebenen Winkels, daß der Punkt P in die Gerade CD und der Punkt Q in die Gerade LZ fällt. Verschiebt man dann dieses Lineal unter Aufrechterhaltung der genannten Lagenverhältnisse so lange, bis die Kante PQ durch den Punkt R geht, so erhält man als Schnittpunkt von PQ mit dem Kreise einen Punkt A, und wenn man in analoger Weise das Lineal auf der anderen Seite von LZ verschiebt, bis die Kante PQ durch S geht, so erhält man den Schnittpunkt B. Die durch A und B gezogenen Durchmesser AN und BM teilen dann den gegebenen Winkel in drei gleiche Teile.[1])

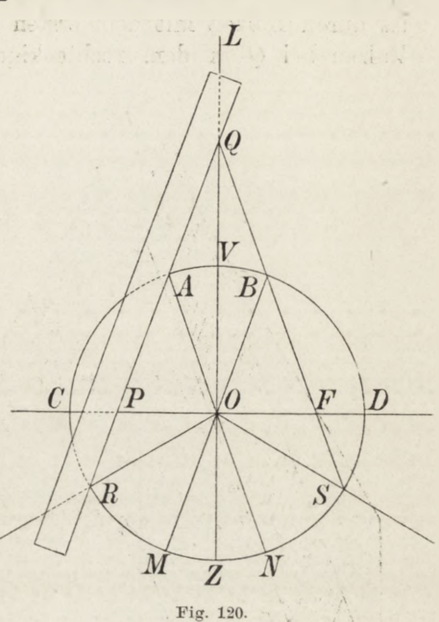


Fig. 120.

In der Tat, da $AO = \frac{1}{2} PQ$ und POQ ein rechter Winkel ist, so ist $PA = AO = AQ = OB = BF = BQ$, d. h. das Viereck $AOBQ$ ist ein Rhombus, und aus dem Parallelismus der Geraden AO, QB und BO, QA folgt, daß die Winkel PAO und OBF beide gleich dem Winkel MON sind, daß also $\sphericalangle MON = \sphericalangle NOS = \sphericalangle ROM$ ist.

Betrachten wir jetzt den in Fig. 121 dargestellten Amadorischen Dreiteiler. Er besteht aus zwei aus Metallblech hergestellten Stücken, von denen das eine die Form eines zu einer Achse symmetrischen Neunecks hat und mit drei Ausschnitten versehen ist, einem halbkreisförmigen, einem gemischtlinigen gleichschenklig-trapezförmigen und einem rechteckigen. Der Bogen des trapezförmigen Aus-

1) Den Punkt Q kann man auch durch eine Konchoide erhalten, deren Pol der Punkt R, deren Achse die Gerade CD und deren Intervall gleich dem Durchmesser CD ist.

schnittes gehört zu einem Zentriwinkel von 60°. Die Achse des Neunecks ist in das Blech eingeritzt. Das andere linealförmige Stück ist durch Bolzen mit dem ersten verbunden, und zwar kann sich der Bolzen bei Q in dem rechteckigen Ausschnitt ohne seitliche Abweichung bewegen, und der Bolzen bei P ist so beschaffen, daß er das Blech des anderen Stückes oben und unten halbkreisförmig bedeckt. Beide Bolzen können durch Schrauben in irgend einer Lage festgeschraubt werden. Die Entfernung der Achsen beider Bolzen ist genau gleich dem Durchmesser CD, und die rechte Kante des linealförmigen Stückes geht genau durch diese Achsen.

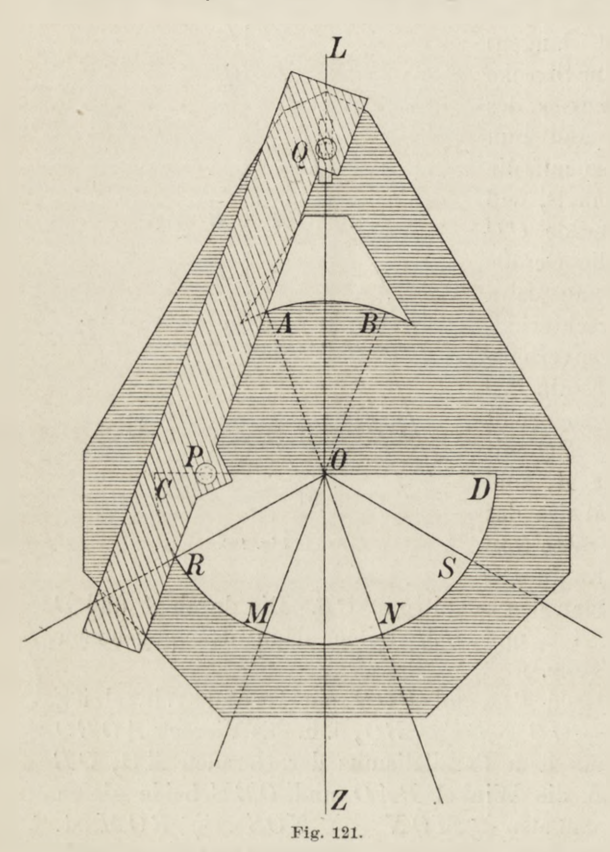


Fig. 121.

Will man nun irgend einen gegebenen Winkel ROS in drei gleiche Teile teilen, so halbiert man ihn zunächst, legt dann das beschriebene Instrument so auf die Ebene des Winkels, daß der Punkt O auf seinen Scheitel zu liegen kommt und die Symmetrieachse des Instruments mit der Halbierungslinie LZ des Winkels zusammenfällt. Dann verschiebt man den Bolzen P so lange an der Kante CD des Apparates, bis die rechtsseitige Kante des linealförmigen Stückes durch den Schnittpunkt R des Schenkels OR des gegebenen Winkels mit dem kreisförmigen Ausschnitte geht. Nun schraubt man die Bolzen fest, fixiert den Schnittpunkt A der Geraden PQ mit dem oberen Kreisbogen und verbindet ihn mit O: so erhält man die eine der gewünschten Geraden ON, und die andere OM kann man dann noch erhalten, wenn man das lineal-

förmige Stück in derselben Weise bis zum Punkte S verschiebt und den Punkt B bestimmt.[1])

Für die Teilung eines Winkels in 2^n+1 (also u. a. in drei) gleiche Teile sei noch auf ein sehr einfaches besonderes Instrument hingewiesen, den Vielteiler von Nicholson.[2]) Dieses Instrument hat die in Fig. 122 wiedergegebene Gestalt; das Stück $PQ = m$ ist gleich dem Stücke QR und heißt der Modul des Instruments; in P befindet sich die Spitze eines Bleistifts. Man arbeitet mit diesem Instrumente, indem man den Punkt R auf einer Kurve, der Leitlinie, sich bewegen läßt, während die Kante SQ beständig durch einen festen Punkt O geht. Der Punkt P beschreibt dann eine andere Kurve, die den Namen Polyode (von πολύς, viel, und ὁδός, Weg) führt.

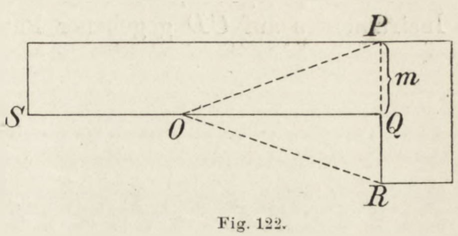


Fig. 122.

Sehen wir zu, wie man mit diesem Instrumente einen Winkel in beliebig viele, zunächst drei, gleiche Teile teilen kann.

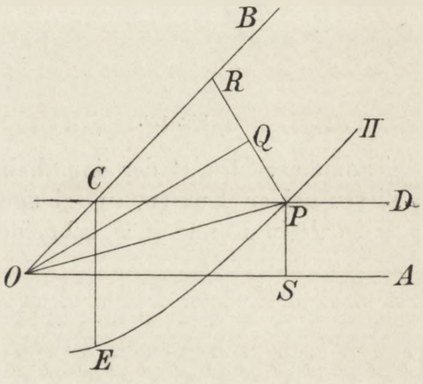


Fig. 123.

Es sei AOB (Fig. 123) der gegebene Winkel, dann ziehen wir in der Entfernung m (Modul des Instruments) eine Parallele CD zu OA und beschreiben die Polyode Π, für die OB die Leitlinie und O der feste Punkt ist. Den innerhalb des Winkels gelegenen Schnittpunkt P dieser Polyode mit der Geraden CD verbinden wir mit O, dann ist $\sphericalangle AOP = \frac{1}{3} \sphericalangle AOB$. Dies ergibt sich sofort aus der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke RQO, PQO, PSO.

Es ist aber bemerkenswert, daß man mit diesem Instrumente alle drei Lösungen der Aufgabe erhält. Denn die Polyode besteht in diesem Falle, wie man leicht erkennt, aus zwei sich um O herumziehenden und ins Unendliche gehenden Zweigen, und diese schneiden

1) Andere Dreiteiler des Winkels sind von A. Jusinieri (Vicenza 1822), A. Lorenzoni (Bologna 1827) und anderen erdacht und konstruiert worden.

2) Beschrieben und in seiner Anwendung erläutert in der Arbeit: The multisection of angles, The Analyst 10 (1883).

die Gerade CD in vier Punkten, von denen drei die drei Lösungen der Aufgabe ergeben, während der vierte ein durch die Natur des Instrumentes auf CD gegebener Punkt, nämlich (Fig. 123) der zu E (wenn E in bezug auf OA symmetrisch zu C, dem Schnittpunkte von OB und CD, ist) in bezug auf O symmetrisch liegende Punkt ist.

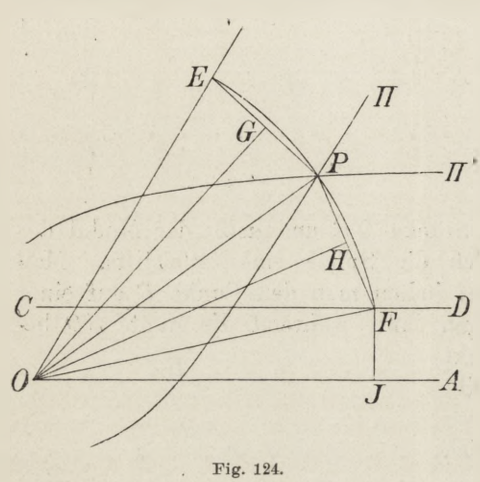


Fig. 124.

Handelt es sich um die Teilung eines Winkels AOB in fünf gleiche Teile, so ziehe man (Fig. 124) wie im vorhergehenden Falle die Parallele CD zu OA und beschreibe erstens die Polyode Π in bezug auf die Leitlinie OB und zweitens die Polyode Π' in bezug auf die Leitlinie CD, beide Male O als festen Punkt genommen. Ist P der innerhalb des Winkels liegende Schnittpunkt dieser beiden Kurven, so schlage man mit OP einen Kreis, der OB und CD in E und in F schneiden mag, und halbiere die Sehnen EP und PF in G und H. Die Linien OG, OP, OH, OF sind dann die gesuchten Teilungslinien. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Figur.

In ähnlicher Weise wird der Vielteiler in allen anderen Fällen angewandt.

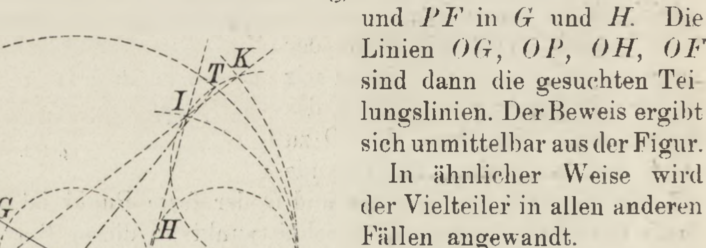


Fig. 125.

§ 17. Dreiteilung des Winkels durch elementare Näherungskonstruktionen.

Methode von E. Cominotto.[1]) Es sei ABC der Winkel und AC der Bogen eines um B mit einem beliebigen Radius beschriebenen Kreises, den man in drei gleiche Teile teilen soll (Fig. 125). Wir teilen den Radius BA durch die Punkte D, E in drei gleiche Teile und tragen über B hinaus $BF = BD = DE = EA$ ab. Darauf schlagen wir um B mit BD den Bogen DG

1) Trisezione approssimata dell' angolo, Padova 1895.

und um E mit EA den Halbkreis AD, und auf diesem tragen wir von A aus nach D hin den Bogen $AH = DG$ ab. Nun wird die Gerade DH gezogen und von D aus mit dem Radius DA der Bogen AI geschlagen, der zwischen DA und DH liegt; ferner wird die Gerade FI gezogen und von F aus mit FA der Bogen AK geschlagen, der zwischen FA und FI liegt. Dann schneidet der durch K, I, A gehende Halbkreis (AI steht offenbar auf FK normal) den Bogen AC in einem Punkte T, der mit großer Annäherung den dritten Teil von AC bestimmt.

Wir wollen zeigen, daß sich auf diese Weise für einen Bogen von 180^0 eine gute Annäherung ergibt; Cominotto behauptet dann, daß man für einen kleineren Winkel ein um so genaueres Resultat erhält. Diese, unbewiesen gelassene, Behauptung haben graphische Untersuchungen bestätigt. Wiederholen wir also die vorstehende Konstruktion (wie in Fig. 126) für den besonderen Fall eines gestreckten Winkels ABC, also eines Bogens AC von 180^0, so wollen wir zusehen, um wie viel AT von dem Radius, den wir der Einfachheit wegen gleich 1 annehmen, abweicht. Zu diesem Zwecke berechnen wir die Koordinaten des Punktes T, wenn B als Anfangspunkt und BA als x-Achse genommen wird; diese Koordinaten werden durch die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen für die Kreise ATC vom Mittelpunkte B und KTA vom Mittelpunkte V geliefert.

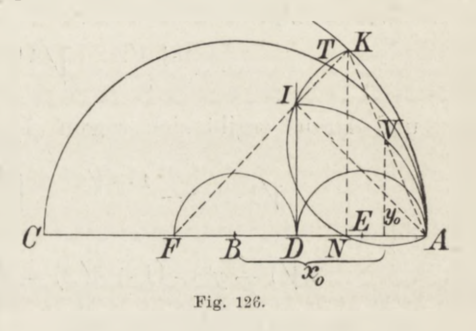


Fig. 126.

Die Gleichung des Kreises ATC ist

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1}$$

Zur Herstellung der Gleichung des Kreises KTA muß man den Radius VA und die Koordinaten des Mittelpunktes berechnen.

Nun ist

$$VA^2 = \tfrac{1}{4}(AK)^2 = \tfrac{1}{4}(IA^2 + IK^2),$$

und da

$$IA = \tfrac{2}{3}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad IK = \tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{3}\sqrt{2} = \tfrac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$$

ist, so ergibt sich

$$VA^2 = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{8}{9} + \tfrac{4}{9}(2 - \sqrt{2})^2\right] = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{9}.$$

Zur Berechnung der Koordinaten des Mittelpunktes V verbinde man K mit dem Punkte N, in dem der Kreis KIA den Radius BA schneidet. Bezeichnet man mit x_0, y_0 die Koordinaten von V, so ergibt sich, da $NA = IK$, $NK = IA$ ist,

$$x_0 = 1 - \tfrac{1}{2} IK = 1 - \tfrac{1}{3}(2 - \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$$

$$y_0 = \tfrac{1}{2} NK = \tfrac{1}{2} IA = \tfrac{1}{3} \sqrt{2}.$$

Daher ist die Gleichung des Kreises KTA:

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4(2-\sqrt{2})}{9}. \qquad (2)$$

Hieraus folgt

$$x - \frac{1+\sqrt{2}}{3} = \sqrt{\frac{4(2-\sqrt{2})}{9} - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

und daraus ergibt sich wegen (1):

$$\sqrt{1-y^2} - \frac{1+\sqrt{2}}{3} = \sqrt{\frac{4(2-\sqrt{2})}{9} - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

oder

$$3\sqrt{1-y^2} - (1+\sqrt{2}) = \sqrt{4(2-\sqrt{2}) - (3y - \sqrt{2})^2}.$$

Durch Quadrierung folgt:

$$9(1-y^2) + (1+\sqrt{2})^2 - 6(1+\sqrt{2})\sqrt{1-y^2} = 6 - 4\sqrt{2} - 9y^2 + 6\sqrt{2}\cdot y$$

oder

$$6(1+\sqrt{2}) - 6(1+\sqrt{2})\sqrt{1-y^2} = 6\sqrt{2}\cdot y$$

oder

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\, y = \sqrt{1-y^2}.$$

Daher

$$1 + \frac{2}{(1+\sqrt{2})^2} y^2 - \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} y = 1 - y^2,$$

$$\frac{2 + (1+\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})^2} y^2 - \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} y = 0.$$

Die Lösung $y = 0$ ergibt den Punkt A. Für den Punkt T ist also:

$$y = \frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2 + (1+\sqrt{2})^2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}} = 0{,}874\cdots.$$

Daher ist

$$x = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1 - 0{,}874\cdots^2} = 0{,}485.$$

Wenn AT genau gleich dem Radius des Kreises ATC wäre, so würden die Koordinaten von T sein:

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5\,,$$

und diese Werte unterscheiden sich sehr wenig von den für y und x gefundenen Werten, wenn man die $\sqrt{2}$ und die $\sqrt{3}$ bis auf ein Tausendstel berechnet. Aus diesen Werten von x und y ergibt sich

$$AT = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = 0{,}96\cdots,$$

also weicht AT vom Radius 1 um weniger als $\frac{4}{100}$ ab.

Daher sehen wir, daß die durch diese Konstruktion erreichte Annäherung für einen Bogen von 180° so groß ist, daß bei dem Gebrauch von Lineal und Zirkel der Fehler verschwindet, und für einen kleineren Winkel hat sie sich noch als größer erwiesen.

Cominotto erwähnt in seinem angeführten Werke noch die folgende Näherungskonstruktion für die Dreiteilung des Winkels, die sehr einfach ist und für genügend spitze Winkel einen unmerkbaren Fehler ergibt.

Ist ABC (Fig. 127) der in drei gleiche Teile zu teilende Winkel und DE der zu ihm (auf einem Kreise vom Mittelpunkte B und beliebigem Radius) gehörige Bogen, so ziehe man die Halbierungslinie des Winkels ABC und trage auf ihr von dem Punkte H aus, in dem sie den Bogen DE schneidet, die Strecke HF gleich dem Radius ab. Verbindet man dann den Punkt D', der dem Punkte D auf dem Kreise diametral gegenüberliegt, mit dem Punkte F, so schneidet die Gerade $D'F$ den Bogen DE in einem Punkte G, der näherungsweise den dritten Teil dieses Bogens bestimmt.

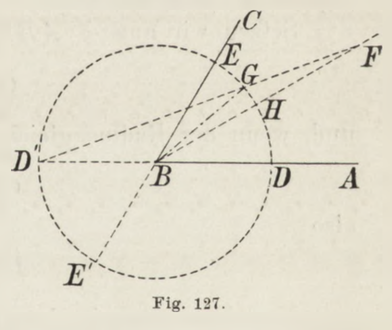


Fig. 127.

Führt man aber diese Konstruktion für einen Bogen von 180° aus, so weicht EG vom Radius ziemlich stark ab, und es ergibt sich in diesem Falle aus der Rechnung, wenn man den Radius des Kreises gleich 1 setzt, für EG ein Wert, der um mehr als ein Zehntel kleiner als 1 ist. Diese Konstruktion wird von Cominotto als bekannt angeführt; ihr ist die von Cominotto selbst angegebene vorzuziehen, da mit ihr eine weit größere Annäherung erreicht wird.

Methode von P. Monti.[1]) Ist ABC (Fig. 128) der in drei gleiche Teile zu teilende Winkel und AC der dazu gehörige Bogen, so ziehen wir die Halbierungslinie BD des gegebenen Winkels und durch den Punkt D die Parallele DE zu BC und tragen auf dieser den halben Radius bis G ab. Der Schnittpunkt der Geraden CD und BG möge mit H bezeichnet sein. Nun tragen wir den Winkel $LBD = DBG$ auf der anderen Seite von BD ab und errichten im inneren Punkte M, der die Strecke BD im Verhältnis $1:5$ teilt, die Normale, die BL in N treffen mag. Die Gerade NH trifft den Bogen AC in einem Punkte T, der näherungsweise den dritten Teil des Bogens AC und daher des Winkels ABC bestimmt. Der hier folgende Beweis ist von G. Schiaparelli.

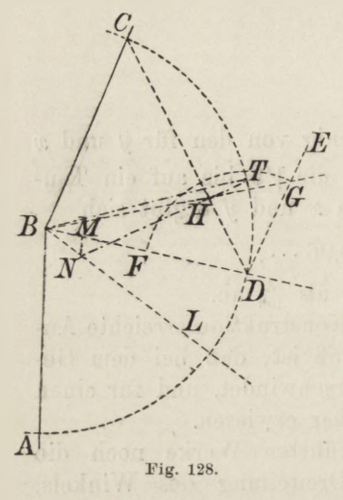


Fig. 128.

Wir schicken voraus, daß infolge der angegebenen Konstruktion

$$HD = \tfrac{1}{3} CD$$

ist. Denn die Dreiecke BHC und GHD sind ähnlich, und BC ist doppelt so groß als DG.

Setzen wir nun $\sphericalangle ABD = \varphi$, so ist

$$\sphericalangle CDB = 90 - \frac{\varphi}{2},$$

und, wenn der Radius gleich 1 gesetzt wird,

$$CD = 2 \sin \frac{\varphi}{2},$$

also

$$HD = \tfrac{2}{3} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Nun kann man in dem Dreiecke BDH die Seite HB und den Winkel DBH, den wir β nennen wollen, berechnen.

Jetzt kennt man in dem Dreiecke BNH die Seite BH, die Seite $BN = \frac{BM}{\cos\beta} = \frac{1}{6\cos\beta}$ und $\sphericalangle NBH = 2\beta$. Also kann man den Winkel BHN, den wir mit α bezeichnen wollen, berechnen. Damit kennt man von dem Dreiecke BHT die Seite BH, die Seite $BT = 1$ und

1) Regola generale per la soluzione grafica della trisezione dell' angolo di P. Monti, seguita dalla dimostrazione del prof. G. Schiaparelli, Il Politecnico 1895.

$\sphericalangle THB = 180^0 - \alpha$ und kann also den Winkel HBT berechnen, den wir mit ε bezeichnen wollen.

Aber es ist $\varepsilon + \beta = \sphericalangle DBT$, und dieser Winkel müßte gleich $\frac{\varphi}{3}$ sein, wenn die Konstruktion genau wäre. Da dies nicht möglich ist, da wir nur mit Lineal und Zirkel operierten, so wird der begangene Fehler durch

$$\left| (\beta + \varepsilon) - \frac{\varphi}{3} \right|$$

ausgedrückt.

In der folgenden Tabelle sind von 5 zu 5 Graden zwischen 0^0 und 90^0 die Werte von $\frac{\varphi}{3}$ und $\sphericalangle DBT = \beta + \varepsilon$ zusammengestellt. Die letzte Kolumne gibt den Fehler an, und ihr Anblick zeigt, daß dieser Fehler sehr klein ist; er erreicht niemals die Größe von 7 Minuten und ist also bei dieser Art von Konstruktionen unmerkbar, auch wenn sie mit großer Genauigkeit ausgeführt sind.

φ	$\frac{\varphi}{3}$	$\sphericalangle DBT = \beta + \varepsilon$	Fehler
0^0	0	0	0
5^0	$1^0\,40'$	$1^0\,40'$	0
10^0	$3^0\,20'$	$3^0\,20'\,1''$	$+\,0'\,1''$
15^0	5^0	$5^0\,0'\,2''$	$+\,0'\,2''$
20^0	$6^0\,40'$	$6^0\,40'\,4''$	$+\,0'\,4''$
25^0	$8^0\,20'$	$8^0\,20'\,6''$	$+\,0'\,6''$
30^0	10^0	$10^0\,1'$	$+\,1'$
35^0	$11^0\,40'$	$11^0\,41'\,7''$	$+\,1'\,7''$
40^0	$13^0\,20$	$13^0\,22'\,4''$	$+\,2'\,4''$
45^0	15^0	$15^0\,3'\,2''$	$+\,3'\,2''$
50^0	$16^0\,40'$	$16^0\,44'\,1''$	$+\,4'\,1''$
55^0	$18^0\,20'$	$18^0\,25'\,1''$	$+\,5'\,1''$
60^0	20^0	$20^0\,5'\,1''$	$+\,5'\,9''$
65^0	$21^0\,40'$	$21^0\,46'\,6''$	$+\,6'\,6''$
70^0	$23^0\,20'$	$23^0\,26'\,8''$	$+\,6'\,8''$
75^0	25^0	$25^0\,6'\,7''$	$+\,6'\,7''$
80^0	$26^0\,40'$	$26^0\,45'\,2''$	$+\,5'\,2''$
85^0	$28^0\,20'$	$28^0\,22'\,6''$	$+\,2'\,6''$
90^0	30^0	$29^0\,58'\,5''$	$-\,1'\,55''$

Diese Konstruktion ist viel genauer als die von Cominotto angegebene. Wendet man sie auf einen gestreckten Winkel an, so ergibt sich als Differenz zwischen der Sehne des gefundenen Winkels und dem Radius weniger als $\frac{2}{1000}$.

III.

§ 18. Lösung der Aufgaben dritten Grades mit Hilfe einer festen Parabel. Von den bisher betrachteten besonderen Aufgaben gehen wir nun über zu der allgemeinen Betrachtung der Aufgaben dritten Grades und solcher, die auf Aufgaben dritten Grades zurückführbar sind, d. h. derjenigen Aufgaben, welche mit dem Lineal und dem Zirkel (rationalen Operationen und Quadratwurzelziehungen) sich auf die Konstruktionen der Wurzel einer Gleichung dritten Grades oder aufeinander folgender Gleichungen dritten Grades zurückführen lassen.

Ein Verfahren ähnlich dem, das schon vorher in verschiedenen Fällen eingeschlagen worden ist, läßt erkennen, daß man bei Benutzung des Lineals und des Zirkels alle Aufgaben dritten Grades mit Hilfe einer vollständig gezogenen Parabel lösen kann.

Die allgemeine Aufgabe dritten Grades, die man als Typus nehmen kann, besteht in der gleichzeitigen Auflösung einer Gleichung dritten und einer Gleichung ersten Grades zwischen den Koordinaten x und y, d. h. in der Bestimmung der Schnittpunkte einer (angegebenen, aber nicht gezeichneten) Kurve dritten Grades und einer Geraden. Aber wenn man in der Gleichung dritten Grades zwischen x und y für y den linearen Ausdruck einsetzt, den die Auflösung der Gleichung ersten Grades zwischen x und y ergibt, so erhält man eine kubische Gleichung in x, und daher ist es klar, daß die typische Aufgabe dritten Grades in der Konstruktion der Wurzeln einer kubischen Gleichung in x besteht.

Nun sei die Parabel $y = x^2$ gegeben. Wir schneiden sie mit dem durch den Anfangspunkt gehenden Kreise vom Mittelpunkte (α, β), dessen Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \tag{1}$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$$

ist. Setzt man in dieser Gleichung $y = x^2$, so erhält man die Gleichung

$$x^4 - (2\beta - 1)x^2 - 2\alpha x = 0$$

oder, da die Wurzel $x = 0$ nicht interessiert,

$$x^3 - (2\beta - 1)x - 2\alpha = 0.$$

Aber die allgemeinste Gleichung dritten Grades in x läßt sich auf den vorstehenden Typus zurückführen, da sie bei einer rationalen Transformation die Form

$$x^3 - px + q = 0$$

annimmt; also ist nur

$$p = 2\beta - 1$$
$$q = -2\alpha$$

zu setzen.

Daher ist die obige Angabe bewiesen, und diese bildet eine unmittelbare Verallgemeinerung dessen, was wir bei der Behandlung der beiden besonderen Aufgaben gesehen haben. In der Tat kommen wir auf die Verdoppelung des Würfels von der Seite a zurück, wenn wir $\alpha = a^3$ und $\beta = \frac{1}{2}$ nehmen, und wir erhalten andererseits die Dreiteilung eines Winkels φ, dessen trigonometrische Tangente a ist, wenn wir

$$\alpha = a(1 + a^2)$$
$$\beta = \frac{1 + 3(1 + a^2)}{2}$$

setzen.

Der vorstehende Satz kann verallgemeinert werden, wenn man annimmt, daß nicht eine Parabel, sondern irgend ein fester Kegelschnitt, jedoch kein Kreis; in der Ebene gezogen ist. Ist ein solcher Kegelschnitt gegeben, so kann jede Aufgabe dritten Grades mit dem Lineal und dem Zirkel gelöst werden. Dies ist von Kortum und Henry J. S. Smith in zwei bekannten Arbeiten, die im Jahre 1868 den Preis der Berliner Akadamie erhielten, dargetan worden.[1])

§ 19. Lineare Lösung der Aufgaben dritten Grades mit Hilfe einer festen Kurve dritter Ordnung. F. London hat in seiner Abhandlung „Die geometrischen Konstruktionen dritten und vierten Grades, ausgeführt mittels der geraden Linie und einer festen Kurve dritter Ordnung“[2]) ein Resultat ausgesprochen, das sich dem von Poncelet und Steiner für die Aufgaben zweiten Grades gefundenen zur Seite stellt: Alle Aufgaben dritten Grades können allein mit dem Lineal gelöst werden, wenn eine vollständig gezogene fundamentale Kurve dritter Ordnung und für die metrischen Aufgaben überdies ein Quadrat gegeben ist (vgl. Art. III).

Wir werden den Beweis dieses Satzes in direkter Weise führen, indem wir die beiden besonders einfachen Fälle ins Auge fassen, in denen als fundamentale Kurve eine Parabel dritter Ordnung

---

1) Kortum, Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades, Bonn 1869; Henry J. S. Smith, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, 1868; Coll. math. pap. II, pg. 1—66.

2) Zeitschr. Math. Phys. Bd. 41.

$$y = x^3$$

oder eine Zissoide (§ 5)

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

genommen wird, und wir wollen außerdem das Quadrat der Punkte

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$$

als gegeben betrachten, da es uns gestattet, die Konstruktionen aller Strecken, die durch rationale Operationen aus den gegebenen Stücken hervorgehen, linear auszuführen (vgl. Art. IV).

Für den ersten Fall genügt die Bemerkung, daß die Wurzeln der Gleichung dritten Grades

$$x^3 - px - q = 0$$

die Abszissen der Punkte sind, die die Parabel

$$y = x^3$$

und die Gerade

$$y = px + q$$

gemeinsam haben (vgl. § 7).

Wenden wir uns nun dem zweiten Falle zu, in dem die Zissoide gegeben ist, so wollen wir vorausschicken, daß die typische Aufgabe dritten Grades, die man von der Lösung einer kubischen Gleichung in x abhängen läßt, auch so angesehen werden kann, als hinge sie von der Lösung einer kubischen Gleichung in $\frac{y}{x}$ ab: in der Tat ist nur eine Koordinatentransformation von der Form

$$x = \frac{Y}{X}, \quad y = Y$$

auszuführen.

Nun wollen wir annehmen, die Zissoide sei durch einen Parameter t in folgender Weise gegeben:

$$x = \frac{2rt^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2rt^3}{1 + t^2}, \quad t = \frac{y}{x};$$

aus diesen Formeln geht durch Elimination von t genau die Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

hervor.

Schneiden wir diese Zissoide mit der allgemeinen Geraden

$$y = ax + b,$$

so werden die Schnittpunkte durch die Gleichung

$$t = \frac{y}{x} = a + \frac{b}{x},$$

gegeben, d. h. (wenn man für x seinen Ausdruck in t einsetzt) durch

$$2rt^3 - (2ar + b)t^2 - b = 0.$$

Nun handelt es sich darum, zu beweisen, daß die allgemeinste Gleichung dritten Grades in $t = \frac{y}{x}$, die in der Form

$$\alpha t^3 + \beta t + \delta = 0$$

angenommen werden kann, sich rational in eine Gleichung ohne das lineare Glied transformieren läßt, die jedoch das quadratische Glied enthält.

Dies geschieht in der Tat ganz einfach, indem man $t = \frac{1}{t'}$ setzt, denn dadurch verwandelt sich die vorstehende Gleichung in die andere:

$$\delta t'^3 + \beta t'^2 + \alpha = 0,$$

und diese ist von der verlangten Form.

London empfiehlt besonders, die Zissoide als feste Kurve zu nehmen, sowohl wegen der einfachen Art, in der sie mechanisch beschrieben werden kann, als auch darum, weil sie die Kreispunkte enthält, zu denen die metrischen Konstruktionen in Beziehungen stehen.

Man kann überdies erkennen, daß „wenn eine Zissoide K und der Mittelpunkt O ihres Erzeugungskreises gegeben sind, man allein mit dem Lineal das fundamentale Quadrat konstruieren kann, das die Spitze der Zissoide und ihre beiden Schnittpunkte mit dem genannten Kreise zu Eckpunkten hat"[1]), und

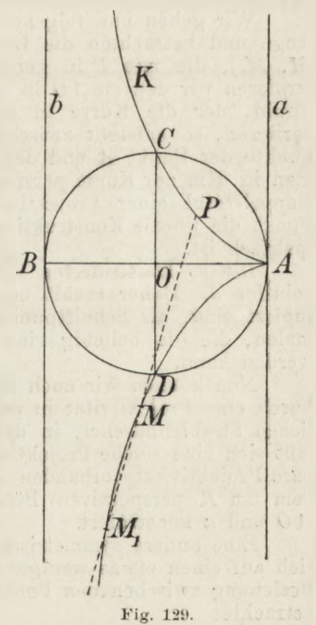


Fig. 129.

1) Wir betrachten die durch die nebenstehende Figur dargestellte Zissoide K. Sie wird als vollständig gezogen vorausgesetzt, und der Mittelpunkt O ihres Erzeugungskreises soll gegeben sein. Wir wollen den Punkt B, den Schnittpunkt der Asymptote b mit der Geraden OA, und die Punkte C, D der Kurve, die zusammen mit A das Quadrat $ACBD$ bilden, konstruieren.

Dazu müssen wir den Begriff der Projektivität und den besonderen der Involution auf einer Zissoide zu Hilfe nehmen: man definiert als projektive Punktreihen auf K zwei Punktreihen, die durch den Schnitt mit zwei projektiven konzentrischen Strahlenbüscheln vom Mittelpunkte A entstehen.

daraus geht hervor, daß alle, die deskriptiven und die metrischen, Aufgaben dritten Grades allein mit dem Lineal gelöst werden können, wenn eine feste Zissoide und der Mittelpunkt ihres Erzeugungskreises gegeben sind.

§ 20. Zurückführung der Aufgaben dritten Grades auf die Dreiteilung des Winkels oder auf die Konstruktion der mittleren Proportionalen. Wir wollen nun untersuchen, wie die allgemeinen Aufgaben dritten Grades mit den besonderen Aufgaben der Dreiteilung des Winkels und der mittleren Proportionalen zusammenhängen. Der allgemeinen Aufgabe dritten Grades entspricht eine vollständige Gleichung dritten Grades, und diese kann immer durch eine rationale Transformation von dem Gliede zweiten Grades befreit und auf die allgemeine Form

$$z^3 - pz + q = 0 \qquad (1)$$

gebracht werden.

Nun kann man leicht erkennen, daß durch die weitere Transformation $z = \lambda\eta$ diese Gleichung in diejenige verwandelt werden kann, von der die Dreiteilung des Winkels (§ 10) abhängt, nämlich in

---

Wir gehen nun folgendermaßen vor: Wir fassen auf K einen Punkt P ins Auge und betrachten die Involution auf der Kurve, in der zwei Punkte (wie M, M_1), die mit P in gerader Linie liegen, sich entsprechen. Darauf konstruieren wir den zu AO in bezug auf AP und AM_1 konjugierten harmonischen Strahl, der die Kurve in einem Punkte M' schneiden mag. Läßt man M variieren, so entsteht zwischen ihm und M' eine Projektivität, deren Doppelpunkte der Punkt A und der unendlich ferne Punkt von K sind. Darum kann man in dem zur Kurve perspektiven Büschel A die Normale a zu OA als zweiten Doppelstrahl einer Projektivität lineal konstruieren. Daraus folgt für jeden Punkt die lineale Konstruktion des Punktes, der zu ihm in bezug auf OA symmetrisch ist.

Die so konstruierten Paare symmetrischer Punkte bilden auf K eine Involution J. Daher erhält man die Punkte C, D, die in dieser Involution konjugiert sind, als Schnittpunkte von K mit der in O auf OA errichteten Normalen, die (da beliebig viele Parallele zu ihr gegeben sind) lineal konstruiert werden kann.

Nun können wir auch die Asymptote b von K lineal konstruieren, nämlich durch eine Projektivität in dem von den Normalen zu OA gebildeten uneigentlichen Strahlenbüschel, in der a und b Doppelstrahlen sein sollen. In der Tat läßt sich eine solche Projektivität bestimmen, wenn auf K eine mit J vertauschbare Projektivität vorhanden ist; diese aber erhält man ihrerseits, wenn man in dem (zu K perspektiven) Büschel A eine Projektivität mit den Doppelstrahlen AO und a konstruiert.

Eine andere symmetrischere Konstruktion würde sich ergeben, wenn man sich auf einen etwas weniger elementaren Begriff stützt, nämlich die projektive Beziehung zwischen den Punkten von K und den Tangenten in diesen Punkten betrachtet F. E.

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = 0, \tag{2}$$

wenn man λ und a in geeigneter Weise bestimmt. In der Tat, setzt man in (1) $z = \lambda\eta$, so folgt

$$\lambda^3\eta^3 - p\lambda\eta + q = 0$$

oder

$$y^3 - \frac{p}{\lambda^2}y + \frac{q}{\lambda^3} = 0.$$

Und soll nun diese Gleichung mit (2) identisch sein, so ist nur zu setzen

$$\frac{p}{\lambda^2} = 3(1 + a^2) \tag{3}$$

$$\frac{q}{\lambda^3} = -2a(1 + a^2). \tag{4}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{p\lambda}{q} = -\frac{3}{2a}$$

oder

$$a = -\frac{3q}{2p\lambda}. \tag{5}$$

Setzt man in (3) diesen Ausdruck für a ein, so erhält man

$$\frac{p}{\lambda^2} = 3\left(1 + \frac{9q^2}{4p^2\lambda^2}\right)$$

oder

$$12p^2\lambda^2 = 4p^3 - 27q^2,$$

daher

$$\lambda = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{4p^3 - 27q^2}{3}} \tag{6}$$

und, wegen (5),

$$a = -\frac{3q}{\sqrt{\frac{4p^3 - 27q^2}{3}}}. \tag{7}$$

Die von uns ausgeführte Transformation kann man also als eine mit dem Lineal und dem Zirkel ausführbare Konstruktion betrachten, und durch diese Konstruktion wird die Aufgabe dritten Grades auf die Dreiteilung eines Winkels zurückgeführt, wofern der Radikand, der in den Formeln (6) und (7) auftritt, positiv ist. Diese Bedingung muß erfüllt sein, damit man in dieser Konstruktion mit reellen Dingen zu tun hat.

Wir schließen also, daß die Konstruktion der Wurzeln der kubischen Gleichung

$$z^3 - pz + q = 0$$

auf die Dreiteilung eines Winkels zurückkommt, wenn

$$4p^3 - 27q^2 > 0,$$

d. h. wenn die Diskriminante

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$$

ist.

Nun wollen wir dagegen voraussetzen, daß

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0$$

ist. In diesem Falle hat die kubische Gleichung

$$z^3 - pz + q = 0$$

eine reelle Wurzel, die durch folgenden Ausdruck dargestellt wird:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Wenn wir daher in diesem Falle mit dem Lineal und dem Zirkel die Strecken

$$a = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}},$$

$$b = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}},$$

in absolutem Maße genommen, konstruiert haben, so ist nur $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[3]{b}$ zu bestimmen, d. h. die Kante der Würfel zu konstruieren, die den rechtwinkligen Parallelepipeden von den Kanten a, 1, 1 und b, 1, 1 gleich sind. Aber diese Konstruktionen hängen (pg. 191) von der Einschaltung der beiden mittleren Proportionalen zwischen a und 1 und b und 1 ab.

Also schließen wir mit Descartes:[1])

Alle Konstruktionen dritten Grades lassen sich mit dem Lineal und dem Zirkel entweder auf die Dreiteilung eines Winkels oder auf Konstruktionen der beiden mittleren Proportionalen zurückführen.

1) op. cit., pg. 76—77.